

# Численное моделирование локального воздействия на нефтяной пласт с применением фиксированных трубок тока для типичных схем заводнения

К.А. Поташев\*, А.Б. Мазо

Казанский федеральный университет, Казань, Россия

Трудность численного моделирования площадных методов перераспределения фильтрационных потоков в нефтяном пласте состоит в необходимости детального разрешения локальных гидродинамических эффектов и тонкой геологической структуры пласта сантиметровых масштабов на межскважинных расстояниях порядка нескольких сотен метров. Размерность расчетных сеток традиционных трехмерных моделей подобного разрешения даже для отдельных участков воздействия, содержащих малое число нагнетательных и добывающих скважин, оказывается чрезмерно большой для проведения проектировочных вычислений. Для преодоления данных ограничений предлагается выполнять детальное моделирование фильтрационного течения в двумерных поперечных сечениях нефтяного пласта вдоль фиксированных трубок тока переменной ширины между каждой парой взаимодействующих нагнетательных и добывающих скважин. Понижение размерности задачи позволяет использовать сетки высокого разрешения для моделирования краткосрочных локальных воздействий на пласт.

В настоящей работе представлен алгоритм построения единой фиксированной трубки тока между нагнетательной и добывающей скважинами, обеспечивающий минимальную погрешность вычисления динамики дебита и обводненности по задаче двухфазной фильтрации пониженной размерности вдоль трубки тока. Алгоритм продемонстрирован на примере двумерной задачи двухфазной фильтрации в пренебрежении капиллярными и гравитационными силами в однородном пласте постоянной толщины для трех элементов заводнения, соответствующих семи схемам расстановки вертикальных скважин – стандартным и обращенным четырехточечной, пятиточечной и семиточечной, а также смещенной однорядной. Для указанных элементов заводнения построены эффективные трубки тока, относительная ширина которых приближена кусочно-линейными функциями. На примере смещенной однорядной или пятиточечной схем расстановки скважин выполнена параметризация ширины эффективной трубки тока для произвольного отношения сторон элемента заводнения. Представленные трубки тока могут быть использованы в качестве готовых шаблонов для последующего моделирования геолого-технических мероприятий в соответствующих элементах заводнения нефтяного пласта.

**Ключевые слова:** нефтяной пласт, двухфазная фильтрация, геолого-технические мероприятия, фиксированная трубка тока, схемы расстановки скважин, численное моделирование, быстродействующие модели, модели высокого разрешения

**Для цитирования:** Поташев К.А., Мазо А.Б. (2020). Численное моделирование локального воздействия на нефтяной пласт с применением фиксированных трубок тока для типичных схем заводнения. *Георесурсы*, 22(4), с. 70–78. DOI: <https://doi.org/10.18599/grs.2020.4.70-78>

## Введение

Моделирование сложных методов техногенного воздействия на нефтяной пласт, таких как вытеснение нефти растворами полимеров, ПАВ, кислотами, горячей водой и др., часто требует детального воспроизведения геологической структуры пласта и мелкомасштабных гидродинамических эффектов, определяющих эффективность мероприятия. Пространственный шаг подобных расчетных сеток может достигать  $10^{-1}$ – $10^{-2}$  м, что на 1–2 порядка превосходит разрешение традиционных трехмерных моделей заводнения всей залежи. Для описания подобных воздействий на пласт достаточно ограничить расчетную область модели участком пласта, содержащим небольшое число взаимодействующих скважин. Часто это нагнетательная скважина, в которую производится закачка специальных растворов, и ближайшее

ее окружение добывающими скважинами. Однако даже локальные трехмерные модели обычно оказываются непригодными для проектировочных многовариантных расчетов при требуемой степени детализации ввиду чрезмерно большой размерности расчетной сетки. При характерной площади участка порядка 1 км<sup>2</sup> и толщине пласта  $10^0$ – $10^1$  м размерность сетки с шагом 0.1 м будет достигать  $10^{10}$ – $10^{11}$  узлов. Одним из вариантов решения проблемы может быть использование модели фильтрации с фиксированной трубкой тока, позволяющей одновременно принципиально сократить вычислительные затраты и использовать сетки высокого разрешения (Мазо и др., 2017; Поташев и др., 2016; Шелепов и др., 2016). Такие характеристики модели достигаются за счет разложения трехмерной задачи фильтрации на серию двумерных задач в вертикальных сечениях трубок тока.

Подчеркнем, что модель фиксированной трубки тока (МФТТ) не заменяет модель глобальной динамики заводнения, а дополняет ее, поскольку предназначена лишь для описания относительно краткосрочных локальных

\* Ответственный автор: Константин Андреевич Поташев  
E-mail: [KPotashev@mail.ru](mailto:KPotashev@mail.ru)

© 2020 Коллектив авторов

эффектов, при которых общая схема взаимодействия добывающих и нагнетательных скважин на участке сохраняется. При этом совместное использование быстродействующих локальных моделей фиксированной трубки тока с суперэлементной моделью глобального заводнения залежи (Мазо, Булыгин, 2011; Булыгин и др., 2013; Мазо, Поташев, 2020) может принципиально расширить область решаемых проектировочных задач за счет максимального сокращения вычислительных затрат при моделировании разработки нефтяного месторождения.

Описание фильтрационных течений в нефтяных и водных пластах с помощью теории недеформируемых («жестких», фиксированных) трубок тока имеет более чем полувековую историю. В отечественной литературе первые изложения постановок основных задач фильтрации в недеформируемых трубках тока – для несжимаемого и сжимаемого однофазного потока, для поршневого вытеснения одной фазы другой и для двухфазной фильтрации – можно найти в работах (Крылов и др., 1948; Чарный, 1948; Крылов и др., 1962; Чарный, 1963). В зарубежной литературе в качестве первых работ по применению метода трубок тока для моделирования разработки нефтяных пластов упоминаются статьи (Higgins, Leighton, 1961, 1962; Martin, Wegner, 1979).

Согласно данному методу вся область заводнения покрывается небольшим числом трубок тока между каждой парой взаимодействующих нагнетательных и добывающих скважин. Границы трубок тока определяются по линиям тока, построенным из решения стационарной однофазной задачи, и считаются неизменными в течение всего процесса заводнения. Основным принципом данного метода, позволяющим на порядки ускорить решение задачи двухфазной фильтрации, является построение аналитического решения одномерной задачи Баклея-Леверетта для описания переноса насыщенности вдоль трубок тока с непроницаемыми боковыми границами. Для определения расхода для каждой трубки тока в каждый момент времени вычисляется ее полное фильтрационное сопротивление, зависящее от мгновенного распределения в ней насыщенности.

В работах (Higgins, Leighton, 1962; Martin, Wegner, 1979) было показано, что предположение о неизменности формы трубок тока не влечет значительной погрешности решения задачи. Так для типичных схем заводнения погрешность вычисления нефтеотдачи пласта не превосходит 10%, когда отношение предельных подвижностей водной и нефтяной фаз лежит в интервале от 0.1 до 10. При этом ячейка периодичности схемы заводнения разбивалась на 5 трубок тока.

Заметим, что в традиционных подходах ширина трубок тока является функцией продольной координаты, трубки тока могут быть неоднородными по проницаемости и пористости, однако являются одномерными. Для описания вертикальной неоднородности нефтяного пласта он полагается слоистым, вдоль каждого слоя строятся трубки тока одинаковой формы, а обмен жидкостью между слоями при этом не учитывается (например, Higgins, Leighton, 1961; методика Ю.П. Борисова «ВНИИ-1», Сургучев и др., 1984; Emanuel, Milliken, 1997). Распределение дебита скважин на расходы вдоль трубок тока выполняется пропорционально их фильтрационным сопротивлениям.

Для учета в методе трубок тока двумерного течения в неоднородном поперечном сечении пласта была предложена так называемая гибридная схема (Lake et al., 1981), являющаяся комбинацией площадного метода трубок тока и традиционного метода конечных разностей в вертикальном сечении пласта. В ней полагается, что площадное течение определяется расстановкой скважин, тогда как вертикальное поведение потока в первую очередь зависит от геологического строения пласта и способа вытеснения нефти. Модель типичного поперечного сечения пласта между парой нагнетательной и добывающей скважин описывается детальной сеткой с шагом порядка 0.1–1 м. Из решения задачи двухфазной фильтрации по этой модели получают зависимости от числа закачанных поровых объемов воды фазовой доли в отбираемой жидкости и средней насыщенности в трубке тока. Далее строится решение площадной задачи методом трубок тока для модели однослойного пласта. По закачанным в трубки тока поровым объемам жидкости определяется их фильтрационное сопротивление и вынос фаз в добывающую скважину путем масштабирования функций отклика, полученных из решения двумерной задачи в поперечном сечении пласта. Данная схема была обобщена для моделирования различных методов повышения нефтеотдачи пласта (Lake et al., 1981; Emanuel et al., 1989; Renard, 1990). Позже в работе (Hewett, Behrens, 1991) было представлено детальное обсуждение масштабирования свойств при определении осредненных функций отклика для неоднородных вертикальных сечений и получен вывод, что в общем случае неоднородность не позволяет переходить от двумерных задач к одномерным с помощью масштабирования.

Другой способ учета двумерного течения продемонстрирован в работе (Baek, Hewett, 2000). Здесь поперечное сечение каждой трубки тока снова покрывается системой фиксированных трубок тока, вдоль которых строится серия одномерных решений задачи Баклея-Леверетта о переносе насыщенности с пересчетом их фильтрационного сопротивления. Авторы характеризуют предложенный метод как быстрый инструмент для оценки влияния неопределенности геологической модели, который при этом не является удобным методом для решения задач управления нефтяным пластом.

С анализом дальнейшего развития метода трубок тока можно познакомиться, например, в работах (Thiele, 1994; Al-Najem et al., 2012).

Данная работа посвящена исследованию модели фильтрации с фиксированной трубкой тока, представленной в работах (Мазо и др., 2017; Поташев и др., 2016; Мазо, Поташев, 2020). Ее отличие от указанных выше методик заключается в том, что трубка тока является двумерной, отражая характерное вертикальное сечение пласта между нагнетательной и добывающей скважинами. В данном поперечном сечении переменной ширины, соответствующей ширине трубки тока, решается двумерная задача двухфазной фильтрации на детальной расчетной сетке. Таким образом, в данной модели не вводятся упрощения, необходимые для построения аналитического решения задач Баклея-Леверетта вдоль одномерных трубок тока.

В настоящей работе рассматривается вопрос о возможности построения всего одной – эффективной трубки тока, которая бы полностью определяла взаимодействие пары

нагнетательной и добывающей скважин. При этом ширина трубки тока полагается неизменной (фиксированной). Оценивается погрешность определения показателей работы скважин из решения задачи двухфазной фильтрации в трубке тока, и предлагается алгоритм построения эффективной трубки тока, минимизирующий данную погрешность.

Построение эффективной трубки тока продемонстрировано для типичных схем заводнения, описываемых взаимодействием одной пары добывающей и нагнетательной скважин: для прямой и обращенной семи-точечной схемы, эквивалентной четырех-точечной схеме заводнения, и смещенной однорядной схемы, эквивалентной пяти-точечной схеме заводнения (Willhite, 1986).

Полученная для произвольной схемы взаимодействия нагнетательных и добывающих скважин эффективная трубка тока может быть использована в качестве готового шаблона для последующего моделирования геолого-технических мероприятий в соответствующих элементах заводнения нефтяного пласта.

При построении трубок тока используются линии тока, построенные в горизонтальной плоскости по векторному полю скорости фильтрации, определенному из решения двумерной стационарной задачи фильтрации. Такая модель может быть получена путем осреднения по толщине пласта трехмерной модели глобального заводнения на момент проведения локального мероприятия (Мазо и др., 2017).

Имея целью исследовать принципиальную возможность и точность воспроизведения двухфазного фильтрационного взаимодействия нагнетательной и добывающей скважин с помощью одной трубки тока фиксированной ширины, в данной работе рассматривается случай однородного нефтяного пласта постоянной толщины, вскрытого вертикальными совершенными скважинами, в пренебрежении капиллярными и гравитационными эффектами, а также сжимаемостью породы и флюидов. При таких условиях «точные» показатели работы скважин могут быть получены в результате решения двумерной задачи двухфазной фильтрации в области элемента заводнения на детальной расчетной сетке.

**1. Двумерная задача двухфазной фильтрации в элементе заводнения пласта**

При указанных допущениях процесс заводнения осредненного по вертикали нефтяного пласта в пределах ячейки периодичности  $D$  заданной схемы расстановки скважин, моделируемых точечными источниками, будем описывать системой двумерных уравнений в горизонтальной плоскости  $(x,y)$  в безразмерных переменных (Баренблатт, 1984) для давления:

$$t > 0, (x,y) \in D : \nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_{j=1}^{N_w} q_j \delta(x - x_j) \delta(y - y_j),$$

$$\mathbf{u} = -\varphi(s) \nabla p, \tag{1.1}$$

и для насыщенности:

$$t > 0, (x,y) \in D : \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot [f(s) \mathbf{u}] = \sum_{j=1}^{N_w} f(s(x_j, y_j)) q_j \delta(x - x_j) \delta(y - y_j) \tag{1.2}$$

с начальным условием, выражающим отсутствие водной фазы в пласте:

$$t = 0, (x,y) \in D : s = 0, \tag{1.3}$$

граничным условием, отражающим отсутствие потока жидкости через границу  $\partial D$  элемента заводнения в силу симметрии расстановки эквивалентных скважин:

$$t > 0, (x,y) \in \partial D : \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \tag{1.4}$$

заданным забойным давлением и условием полного насыщения водной фазой на нагнетательных скважинах:

$$t > 0, (x,y) = (x_j^I, y_j^I) : p = 1, s = 1, j = 1..N_w^I \tag{1.5}$$

и заданным забойным давлением на добывающих скважинах:

$$t > 0, (x,y) = (x_j^P, y_j^P) : p = 0, j = 1..N_w^P. \tag{1.6}$$

Здесь  $t$  – время;  $p$  – давление в жидкости;  $s$  – водонасыщенность;  $\mathbf{u}$  – скорость фильтрации двухфазной смеси;  $\varphi(s) = f_1(s) + K_{\mu} f_2(s)$  – функция суммарной подвижности двухфазной смеси;  $f_1(s) = f_1(s)/\varphi(s)$  – функция Баклея-Леверетта;  $f_1(s) = s^3, f_2(s) = (1-s)^3$  – функции относительных проницаемостей водной и нефтяной фаз, соответственно;  $(x_j, y_j)$  – координаты скважин;  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака;  $q_j$  – удельные на единицу толщины пласта дебиты скважин, определяемые при решении задачи;  $N_w = N_w^P + N_w^I$  – количество скважин в области  $D$ ; верхние индексы  $P, I$  определяют принадлежность параметра добывающим («producer») и нагнетательным («injector») скважинам, соответственно. Отношение  $K_{\mu} = \mu_1/\mu_2$  величин динамической вязкости водной и нефтяной фаз полагалось равным единице.

Геометрия области  $D$  и координаты  $(x_j, y_j)$  расположения скважин задаются в зависимости от моделируемых схем заводнения (рис. 1).

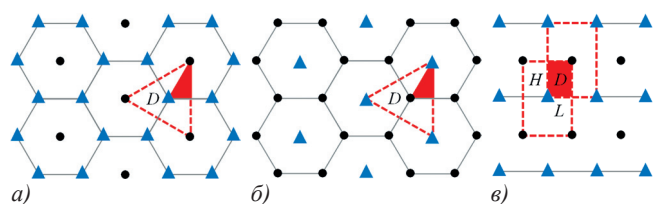


Рис. 1. Схемы расстановки скважин: а) семиточечная (аналог обращенной четырехточечной); б) обращенная семиточечная (аналог четырехточечной); в) смещенная однорядная (аналог стандартной (верхний элемент) и обращенной (нижний) пятиточечной); заливкой указана область ячеек периодичности элементов заводнения нефтяного пласта; • – добывающие скважины; ▲ – нагнетательные скважины

Поскольку каждая рассмотренная схема расстановки скважин полностью описывается взаимодействием одной пары нагнетательной и добывающей скважин ( $N_w^P = N_w^I = 1$ ), то для простоты будем обозначать удельный дебит и обводненность добывающей скважины, полученные из решения задачи (1.1)–(1.6), без дополнительных индексов, называя их в дальнейшем «точными» или «истинными» значениями:

$$q(t) \equiv q_1^P(t), F(t) \equiv f(s(x_1^I, t)). \tag{1.7}$$

**2. Одномерная задача двухфазной фильтрации в трубке тока**

Для построения фиксированных в течение всего процесса заводнения пласта трубок тока используется серия  $N$  линий тока, построенных по векторному полю скорости



фильтрации  $\mathbf{u}(x,y)$ , найденному из решения стационарной задачи однофазной фильтрации (1.1), (1.4) в области  $D$  при начальном распределении насыщенности (1.3).

Линии тока определяются как линии, касательная к которым в каждой точке направлена вдоль вектора  $\mathbf{u}$ . Каждая линия тока имеет свою длину  $\lambda_i (i = 1 \dots N)$  и, согласно условию непроницаемости границы области  $\partial D$  (1.4), начинается (при  $l = 0$ ) в нагнетательной скважине и заканчивается (при  $l = \lambda_i$ ) в добывающей скважине.

Будем понимать под трубкой тока область пласта, ограниченную сверху и снизу его кровлей и подошвой, а по бокам вертикальными поверхностями, проходящими вдоль любых двух линий тока. Предположение о слабой изменчивости формы линий тока по вертикали вблизи скважин, несовершенных по степени вскрытия слоистого пласта, выполняется в широком диапазоне характерных значений проницаемости пропластков (Spirina et al., 2019). Границы трубки тока являются непроницаемыми, и суммарный расход через ее нормальные сечения принимает одинаковое значение по всей длине. Вдоль каждой линии тока  $i$  можно построить отдельную трубку тока, которую в дальнейшем будем называть исходной (ИТТ), обладающую переменной относительной шириной  $w_i(l)$ , обратно пропорциональной модулю скорости фильтрации в данной точке  $l$  линии тока:

$$w_i(l) = 1/|\mathbf{u}(l)|, \quad 0 \leq l \leq \lambda_i, \quad i = 1..N. \quad (2.1)$$

При построении ИТТ предполагается, что скорость фильтрации на всей поверхности скважин радиуса  $r_w$  одинакова и определяется их дебитом (Поташев, Ахунов, 2020). Поэтому функция относительной ширины всех  $N$  ИТТ принимает одинаковые значения на их границах:

$$w_L \equiv w_i(0) = 2\pi r_w / |q^l|, \quad w_R \equiv w_i(\lambda_i) = 2\pi r_w / |q^p|, \quad i = 1..N. \quad (2.2)$$

Постановка задач двухфазной фильтрации в каждой исходной трубке тока  $i = 1 \dots N$  с неизменной в течение всего времени функцией  $w_i(l)$  будет содержать (Мазо и др., 2017) уравнение для давления и насыщенности:

$$t > 0, \quad 0 < l < \lambda_i: \quad \frac{\partial}{\partial l}(w_i u_i) = 0, \quad u_i = -\varphi(s_i) \frac{\partial p_i}{\partial l}, \quad (2.3)$$

$$t > 0, \quad 0 < l < \lambda_i: \quad \frac{\partial s_i}{\partial t} + \frac{1}{w_i} \frac{\partial}{\partial l} [w_i f(s_i) u_i] = 0, \quad (2.4)$$

начальное условие, соответствующее условию (1.3):

$$t = 0, \quad 0 \leq l \leq \lambda_i: \quad s_i = 0, \quad (2.5)$$

и граничные условия, соответствующие условиям (1.5), (1.6) на скважинах:

$$t > 0, \quad l = 0: \quad p_i = 1, \quad s_i = 1; \\ t > 0, \quad l = \lambda_i: \quad p_i = 0. \quad (2.6)$$

Решение задач (2.3)–(2.6) позволяет отыскать в каждой ИТТ ( $i = 1 \dots N$ ) функции давления  $p_i(t,l)$ , насыщенности  $s_i(t,l)$  и скорости фильтрации  $u_i(t,l)$ .

Поскольку все исходные трубки тока в соответствии с распределением в области  $D$  линий тока характеризуются различной длиной  $\lambda_i$  и различными функциями относительной ширины  $w_i(l)$ , то мгновенное положение фронта насыщенности в каждой ИТТ и фазовый состав притока жидкости от нее к добывающей скважине отличаются.

Удельный дебит добывающей скважины и ее обводненность в момент времени  $t$  можно приближенно вычислить

по решениям в исходных трубках тока по формулам:

$$q(t) = \int_0^{2\pi} u^n(t, \varphi) r_w d\varphi \approx 2\pi r_w \sum_{i=1}^N \alpha_i u_i(t, \lambda_i), \quad (2.7)$$

$$F(t) = \frac{1}{q(t)} \int_0^{2\pi} f(s(t, \varphi)) u^n(t, \varphi) r_w d\varphi \approx \sum_{i=1}^N \alpha_i f(s_i(t, \lambda_i)) u_i(t, \lambda_i) / \sum_{i=1}^N \alpha_i u_i(t, \lambda_i), \quad (2.8)$$

где  $\alpha$  – доля кругового контура скважины, на который приходится приток со стороны исходной трубки тока под номером  $i$ , при этом:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1. \quad (2.9)$$

Целью данной работы является разработка способа замены всех исходных трубок тока одной фиксированной эффективной трубкой тока (ЭТТ), решение задачи двухфазной фильтрации вдоль которой позволяло бы определять показатели работы скважин с минимальной погрешностью.

### 3. Построение эффективной трубки тока

Построение эффективной трубки тока по набору исходных трубок тока будем выполнять путем нормировки всех ИТТ по их длине с последующим вычислением средневзвешенной по заданным весовым коэффициентам функции относительной ширины  $w$ . Под весовыми коэффициентами можно понимать коэффициенты  $\alpha_i$ . Тогда задача построения ЭТТ сводится к отысканию оптимальных значений  $\alpha_i$ .

Все параметры и характеристики эффективной трубки тока будем обозначать аналогично параметрам исходных трубок тока без нижнего индекса.

Нормировка всех ИТТ по длине приведет к новой продольной координате:

$$x = \frac{l}{\lambda_i} \in [0, 1].$$

Относительную ширину  $w(x)$  ЭТТ в каждом сечении  $x$  будем вычислять как линейную комбинацию относительных ширин  $w_i(x)$  всех ИТТ с коэффициентами  $\alpha_i$ :

$$w(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i w_i(x). \quad (3.1)$$

На основе постановки (2.3)–(2.6) задач в ИТТ, введя обозначения

$$\bar{u} = \lambda u, \quad \bar{t} = \lambda^{-2} t, \quad \lambda = \sum_{i=1}^N \alpha_i \lambda_i, \quad (3.2)$$

запишем постановку задачи двухфазной фильтрации в эффективной трубке тока:

$$\bar{t} > 0, \quad 0 < x < 1: \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(w \bar{u}) = 0, \quad \bar{u} = -\varphi(s) \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial s}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{w} \frac{\partial}{\partial x} [f(s) w \bar{u}] = 0; \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \bar{t} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1: \quad s = 0; \\ \bar{t} > 0, \quad x = 0: \quad p = 1, \quad s = 1; \\ \bar{t} > 0, \quad x = 1: \quad p = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Вычисляя весь приток пластового флюида к добывающей скважине с помощью решения задачи (3.3)–(3.4) в одной ЭТТ, согласно (2.7), (2.8) и нормировке (3.2), получим формулы для вычисления удельного дебита и

обводненности скважины по МФТТ в эффективной (нижний индекс «E») трубке тока:

$$q_E(t) = 2\pi r_w \bar{u}(\lambda^2 \bar{t}, 1) / \lambda, \quad (3.5)$$

$$F_E(t) = f(s(\lambda^2 \bar{t}, 1)). \quad (3.6)$$

Отметим, что переход от набора исходных трубок тока, обладающих истинными фильтрационными свойствами нефтяного пласта, к осредненной эффективной трубке тока вызывает необходимость реализации процедур апскейлинга (Christie, 1996) – определения эффективных величин абсолютной проницаемости и функций относительных фазовых проницаемостей в эффективных трубках тока, которые бы гарантировали минимальную погрешность при вычислении суммарного и фазовых потоков через нормальные сечения ЭТТ. Тем не менее, оставляя на будущее решение данного вопроса, уравнения (3.3) и (3.6) запишем в предположении о том, что абсолютная и относительные фазовые проницаемости в ЭТТ остаются исходными. Таким образом, повышение точности приближения истинных показателей работы добывающей скважины  $q(t)$ ,  $F(t)$  (1.7) величинами  $q_E(t)$ ,  $F_E(t)$ , вычисленными из решения задачи в ЭТТ по формулам (3.5), (3.6), будем обеспечивать определением весовых коэффициентов  $\alpha_i$ , минимизирующих функционал среднего отклонения:

$$R(\alpha_i) = \frac{1}{2}(R_q(\alpha_i) + R_F(\alpha_i)), \quad (3.7)$$

где  $R_q$ ,  $R_F$  – соответственно максимальные отклонения графиков  $q(t)$ ,  $F(t)$  от  $q_E(t)$ ,  $F_E(t)$  за период  $T$  расчета динамики удельного дебита и обводненности.

Число искомых весовых коэффициентов  $\alpha_i$ , минимизирующих функционал (3.7), совпадает с числом  $N$  ИТТ. Полагая, что степень влияния  $\alpha_i$  отдельной ИТТ на дебит и обводненность скважины линейно убывает с ростом длины  $\lambda_i$  трубки тока, и учитывая условие (2.9), можем записать зависимость:

$$\alpha_i = \alpha_0 - \alpha \lambda_i, \quad \alpha_0 = \frac{1}{N} \left( 1 + \alpha \sum_{i=1}^N \lambda_i \right), \quad \alpha \geq 0. \quad (3.8)$$

Таким образом, задача отыскания оптимальных значений коэффициентов  $\alpha_i$  сводится к задаче одномерной минимизации с отысканием всего одного параметра:

$$\alpha^* = \arg \left[ \min_{\alpha \geq 0} R(\alpha) \right]. \quad (3.9)$$

Заметим, что форма эффективной трубки тока, вообще говоря, не будет совпадать с формой трубок тока, ограниченных какими-либо линиями тока.

#### 4. Результаты

В качестве примеров построения эффективных трубок тока рассмотрены три типичные формы элементов заводнения нефтяного пласта (рис. 1), соответствующие семи различным схемам расстановки скважин: стандартным и обращенным четырех-, пяти- и семи точечным, а также смещенной однорядной (Willhite, 1986).

Для определения «точных» значений дебита и обводненности (1.7) строилось численное решение задачи (1.1)–(1.6) по схеме IMPES (Implicit Pressure, Explicit Saturation – неявной по давлению, явной по насыщенности) (Aziz, Settari, 1979). В соответствии с проведенным исследованием сходимости решения задачи двухфазной фильтрации для каждой схемы заводнения использовались

расчетные сетки, содержащие от 200 до 400 конечных элементов между нагнетательной и добывающей скважинами, что позволяло детально воспроизводить фронтальный характер продвижения насыщенности. Численное решение задачи (3.3)–(3.4) в эффективной трубке тока выполнялось также по схеме IMPES. Детальность расчетной сетки в ЭТТ соответствовала детальности двумерных сеток. Задача одномерной минимизации (3.9) решалась методом золотого сечения. Вычисление отклонения  $R$  по формулам (3.7) для каждой схемы расстановки скважин выполнялось до момента времени  $T$ , соответствующего достижению обводненностью значения  $F = 0.98$ .

#### 4.1. Семиточечная схема расстановки скважин

Ячейка периодичности элемента заводнения семиточечной схемы расстановки скважин аналогична ячейке обращенной четырехточечной схемы (рис. 1, а), когда в центре треугольной области  $D$  расположена нагнетательная скважина, а в ее вершинах – добывающие скважины. Между добывающими скважинами задавалось расстояние  $L = 1$ , радиус скважин был задан равным  $r_w = 0.001$ . Структура линий тока, построенных внутри области  $D$ , и распределение в ней насыщенности на различные моменты времени показаны на рис. 2.

Построение ЭТТ выполнялось для наборов, содержащих разное число  $N$  ИТТ, равномерно покрывающих ячейку периодичности элемента заводнения  $D$  (рис. 1, а). Длины  $\lambda_i$  построенных таким образом исходных трубок тока принимали значения от 0.576 до 0.776. Функция относительной ширины  $w(x)$  ЭТТ (рис. 3, б) и ее приведенная длина  $\lambda = 0.62$  оказались слабо зависящими от числа  $N$  ИТТ при том, что исходные функции  $w_i(x)$  всех ИТТ заметно отличались друг от друга (рис. 3, а). Стабильность функции относительной ширины  $w(x)$  достигается комбинациями коэффициентов  $\alpha_i$ , определяющими вклад каждой исходной трубки тока в эффективную. Например, при  $N = 5$  минимальное и максимальное значения коэффициентов  $\alpha_i$  составили 0.066 и 0.26, отличаясь примерно в 4 раза, а при  $N = 120$  они равны 0.0064 и 0.0088, отличаясь менее чем в 1.5 раза.

Вид результирующей функции  $w(x)$  ЭТТ позволил предложить ее упрощенную кусочно-линейную

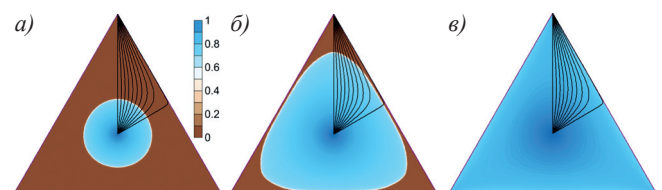


Рис. 2. Структура линий тока в ячейке периодичности элемента семиточечной схемы расстановки скважин и распределение насыщенности в моменты времени а)  $t = 0.1$ , б)  $t = 0.4$ , в)  $t = 3.0$

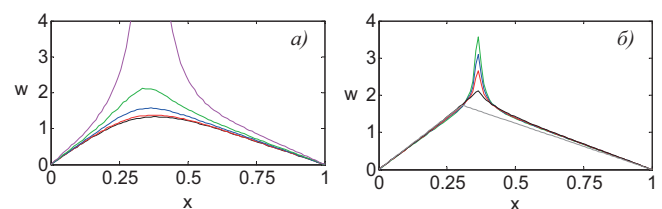


Рис. 3. Функции относительной ширины нормированных по длине трубок тока: а) для всех ИТТ при  $N = 5$ ; б) для ЭТТ при  $N = 3, 5, 10, 120$  и их аппроксимация по (4.1) (линия двойной толщины)

аппроксимацию  $W(x) \approx w(x)/w_R$ , более удобную для быстрых инженерных расчетов. С учетом обозначений (2.2) функцию  $W(x)$  запишем в виде:

$$W(x) = \begin{cases} \omega + ax, & 0 \leq x < \xi, \\ 1 + b(1-x), & \xi \leq x < 1. \end{cases} \quad (4.1)$$

Здесь  $\omega = w_L/w_R$ ; а коэффициенты  $a, b$  отражают конвективный и дивергентный характер течения вблизи нагнетательной и добывающей скважин соответственно и определяются по производным функции  $w(x)$  на границах:  $a = w'(0)/w_R$ ,  $b = -w'(1)/w_R$ . Параметр  $\xi = (b+1-\omega)/(a+b)$  определяется как точка пересечения обеих прямых (4.1).

При построении функции  $W(x)$  по формуле (4.1) (рис. 3, б) были определены следующие значения ее параметров:  $\omega = 2$ ,  $\alpha = a/(\lambda/r_w) = 2.052$ ,  $\beta = b/(\lambda/r_w) = 0.906$ .

На рис. 4 показано сравнение истинной динамики удельного дебита и обводненности добывающей скважины с результатами решения задачи в различных трубках тока. Использование ЭТТ или ее аппроксимации (4.1) (рис. 4, б) приводит к значительному повышению точности воспроизведения функций  $q(t), F(t)$  по сравнению с использованием любой из исходных трубок тока (рис. 4, б) (табл. 1).

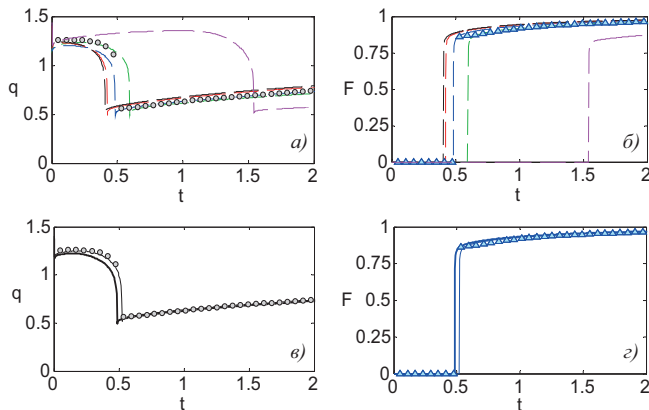


Рис. 4. Сравнение истинных (маркер) и вычисленных в трубках тока (линии) дебита и обводненности: а), б) – из решения задачи (2.3)–(2.6) в каждой ИТТ при  $N = 5$ ; в), з) – из решения задачи (3.3)–(3.4) в ЭТТ с использованием исходной функции  $w(x)$  (тонкие линии) и аппроксимации  $W(x)$  (линии двойной толщины)

Параметр	ИТТ-1	ИТТ-2	ИТТ-3	ИТТ-4	ИТТ-5	ЭТТ	$W(x)$
$R_q$	0.118	0.106	0.081	0.077	0.694	0.027	0.072
$R_F$	0.114	0.095	0.034	0.079	0.578	0.017	0.034
$R$	<b>0.116</b>	<b>0.101</b>	<b>0.058</b>	<b>0.078</b>	<b>0.636</b>	<b>0.022</b>	<b>0.053</b>

Табл. 1. Погрешность вычисления дебита и обводненности по исходным и эффективным трубкам тока для семиточечной схемы расстановки скважин при  $N = 5$

### 4.2. Обращенная семиточечная схема расстановки скважин

Ячейка периодичности элемента заводнения обращенной семиточечной схемы расстановки скважин аналогична ячейке четырехточечной схемы (рис. 1, б), когда в центре треугольной области  $D$  расположена добывающая скважина, а в ее вершинах – нагнетательные скважины. Расстояние между нагнетательными скважинами и радиус скважины также задавались равными  $L = 1$  и  $r_w = 0.001$ .

Структура линий тока, построенных при начальных условиях (рис. 5), совпадает со структурой линий тока в

случае семиточечной схемы расстановки скважин п. 4.1.

Общие закономерности построения эффективной трубки тока обращенной семиточечной схемы при различном числе исходных трубок тока сохранились аналогичными случаю стандартной семиточечной схемы заводнения (п. 4.1). Функция относительной ширины  $w(x)$  ЭТТ и ее аппроксимация  $W(x)$  в виде (4.1) с параметрами  $\omega = 0.5$ ,  $\alpha = 0.492$ ,  $\beta = 0.952$ ,  $\lambda = 0.61$  показаны на рис. 6, а.

На рис. 6, б показано сравнение истинной динамики дебита и обводненности добывающей скважины с результатами решения задачи в ЭТТ. В отличие от стандартной семиточечной схемы отклонение функций обводненности  $F(t)$  и  $F_E(t)$  оказывается более значительным, что объясняется структурой заводнения. Вблизи добывающей скважины формируются области медленного вытеснения нефти (рис. 5, б), вследствие чего рост обводнения также замедляется по сравнению со стандартной семиточечной схемой расстановки скважин. На данном примере становится более наглядным сделанное ранее замечание о необходимости выполнения апскейлинга функций ОФП  $f_1(s), f_2(s)$  для воспроизведения функции  $F(t)$  с помощью решения задачи вдоль одной трубки тока.

Использование эффективной трубки тока или ее аппроксимации (4.1) по сравнению с использованием произвольных исходных трубок тока снижает погрешность воспроизведения функций  $q(t), F(t)$  при  $N = 5$  в среднем в 2.5 раза (табл. 2).

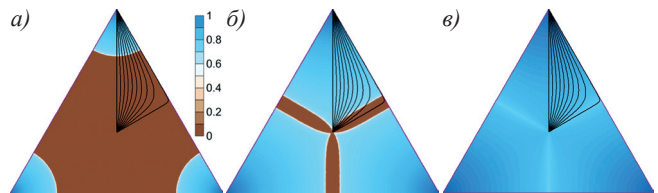


Рис. 5. Структура линий тока в ячейке периодичности элемента обращенной семиточечной схемы заводнения и распределение насыщенности в моменты времени а)  $t = 0.1$ , б)  $t = 0.5$ , в)  $t = 3.0$

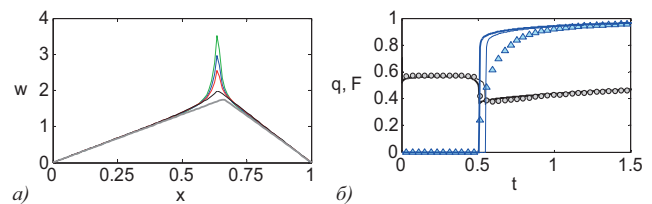


Рис. 6. Результаты построения эффективной трубки тока для обращенной семиточечной схемы заводнения: а) относительная ширина  $w$  ЭТТ при  $N = 3, 5, 10, 120$  (тонкие линии) и аппроксимация  $W$  (линия двойной толщины); б) дебит (черный) и обводненность (синий) – истинные значения (маркеры) и вычисленные по ЭТТ с исходной относительной шириной  $w$  (тонкие линии) и с аппроксимированной шириной  $W$  (линии двойной толщины)

Параметр	ИТТ-1	ИТТ-2	ИТТ-3	ИТТ-4	ИТТ-5	ЭТТ	$W(x)$
$R_q$	0.083	0.069	0.033	0.125	0.217	0.037	0.021
$R_F$	0.149	0.135	0.091	0.118	0.424	0.078	0.099
$R$	<b>0.116</b>	<b>0.102</b>	<b>0.062</b>	<b>0.122</b>	<b>0.321</b>	<b>0.058</b>	<b>0.060</b>

Табл. 2. Погрешность вычисления дебита и обводненности по исходным и эффективным трубкам тока для обращенной семиточечной схемы расстановки скважин при  $N = 5$



### 4.3. Смещенная однорядная схема расстановки скважин

Прямоугольные ячейки периодичности  $D$  элемента заводнения смещенной однорядной схемы расстановки скважин аналогичны ячейкам стандартной и обращенной пятиточечных схем (рис. 1, в). Зададим ширину области  $D$  как  $L = 1$ . Высота  $H$  для случая равноотстоящих скважин совпадает с  $L$ , а в более общем случае может принимать произвольные значения. В левом нижнем углу расположим нагнетательную скважину, в верхнем правом углу – добывающую. Радиус скважин зададим равным  $r_w = 0.001$ .

Для случая  $H = L$  решение задачи (1.1)–(1.6) в области  $D$  симметрично относительно диагонали, проходящей от нагнетательной скважины к добывающей (рис. 7). При иных значениях отношения  $\theta = L/H$  данная симметрия нарушается (рис. 8).

Все расчеты с построением эффективных трубок тока проводились для различных отношений  $\theta = \{1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 1/1\}$ . Согласно форме полученных эффективных трубок тока и учитывая, что  $w_L = w_R$  для всех рассмотренных случаев вместо зависимости (4.1) был использован следующий вид аппроксимации (рис. 9):

$$\frac{w(x)}{w_R} \approx W(x) = \begin{cases} 1+x(h-1)/d, & 0 \leq x \leq d; \\ h, & d < x < 1-d; \\ 1+(1-x)(h-1)/d, & 1-d \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (4.2)$$

Коэффициенты  $d, h$  зависимости (4.2) отыскивались для каждого отношения  $\theta$  из условия наилучшего приближения построенной эффективной трубки тока. Значения  $R, R_q, R_F$  приведены в табл. 3.

Для построения ЭТТ по приближенной зависимости (4.2) при произвольном отношении сторон элемента заводнения  $D$  коэффициенты  $d, h$  были аппроксимированы функциями форм-фактора  $\theta$  (рис. 10, а, б):

$$d = \frac{1}{4} \ln \theta + \frac{1}{2}; \quad \eta \equiv h/(\lambda/r_w) = \frac{7}{20} \theta + \frac{7}{13}. \quad (4.3)$$

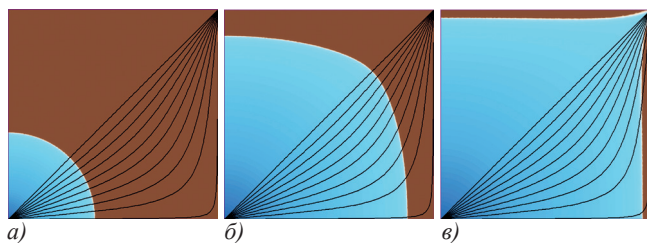


Рис. 7. Структура линий тока в элементе заводнения смещенной однорядной схемы при  $H = L$  и распределение насыщенности в моменты времени а)  $t = 0.5$ , б)  $t = 2.5$ , в)  $t = 4$

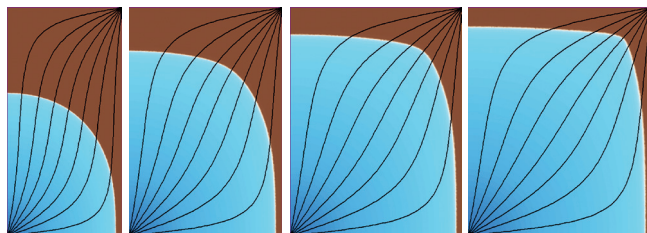


Рис. 8. Структура линий тока в элементе заводнения смещенной однорядной схемы при  $\theta = 1/2, 2/3, 3/4, 4/5$  (слева направо) и распределение насыщенности в момент времени  $t = 4$

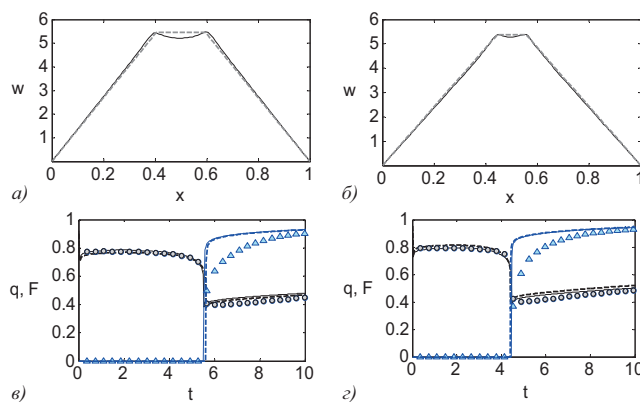


Рис. 9. Результаты построения ЭТТ для смещенной однорядной схемы заводнения при  $\theta = 2/3$  (а, в) и  $\theta = 4/5$  (б, г): а), б) – относительная ширина  $w$  (сплошная линия) и аппроксимация  $W$  по (4.2) (штриховая линия); в, г) дебит (черный) и обводненность (синий) – истинные значения (маркеры) и вычисленные по ЭТТ с исходной относительной шириной  $w$  (сплошные линии) и с аппроксимированной шириной  $W$  (штриховые линии)

L / H	1 / 2	2 / 3	3 / 4	4 / 5	1 / 1
$R_q$	0.058	0.042	0.052	0.052	0.044
$R_F$	0.143	0.133	0.159	0.157	0.169
$R$	<b>0.100</b>	<b>0.087</b>	<b>0.105</b>	<b>0.104</b>	<b>0.106</b>

Табл. 3. Погрешность вычисления удельного дебита и обводненности в эффективной трубке тока для смещенной однорядной схемы расстановки скважин

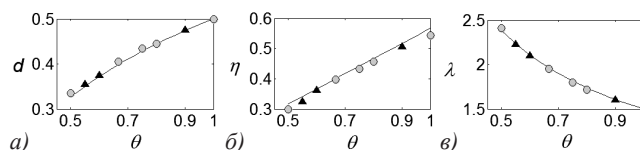


Рис. 10. Зависимости коэффициентов  $d$  (а),  $\eta$  (б),  $\lambda$  (в) аппроксимации (4.2) относительной ширины ЭТТ смещенной однорядной схемы расстановки скважин от отношения сторон элемента заводнения: сплошная линия – приближенные зависимости (4.3), (4.4); маркеры – аппроксимационные (●) и прогнозные (▲) точки

Зависимость входящей в (4.3) приведенной длины  $\lambda$  эффективной трубки тока от форм-фактора  $\theta$  аппроксимировалась функцией (рис. 10, в):

$$\lambda = \frac{3}{2} L \theta^{\frac{2}{3}}. \quad (4.4)$$

Тестирование предложенных аппроксимаций (4.3), (4.4) для трех дополнительных значений форм-фактора  $\theta = \{0.55, 0.6, 0.9\}$  продемонстрировало хорошее совпадение аппроксимированных и действительных значений коэффициентов  $d, \eta, \lambda$ .

Средняя погрешность прогноза коэффициента  $d$  составила 0.8 %, коэффициента  $h$  – 2.9 %, и величины  $\lambda$  – 0.27 % (рис. 10).

### 5. Заключение

Предложена методика построения единой эффективной фиксированной трубки тока, описывающей взаимодействие пары нагнетательной и добывающей скважин, позволяющая понизить размерность задачи двухфазной фильтрации без значительной потери точности воспроизведения показателей работы скважин.

Показано, что для типичных схем заводнения однородного нефтяного пласта форма эффективной трубки тока может быть приближена кусочно-линейными функциями. Для смещенной однорядной схемы заводнения, аналогичной пятиточечным схемам расстановки скважин, предложены простые функциональные зависимости, позволяющие построить эффективную трубку тока при произвольном отношении сторон элемента заводнения.

Построенные трубки тока могут быть использованы в качестве готовых шаблонов для последующего моделирования сложных геолого-технических мероприятий в соответствующих элементах заводнения нефтяного пласта с понижением размерности решаемой задачи.

Изложенный алгоритм продемонстрирован на примере заводнения несжимаемого однородного пласта постоянной толщины без учета капиллярных и гравитационных эффектов, но может быть применен и в более общем случае без указанных ограничений.

## Финансирование

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2020-1478.

## Литература

- Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. (1984). Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 211 с.
- Булыгин Д.В., Мазо А.Б., Поташев К.А., Калинин Е.И. (2013). Геолого-технические аспекты суперэлементной фильтрационной модели нефтяных месторождений. *Георесурсы*, 53(3), с. 31–35. <https://doi.org/10.18599/grs.53.3.10>
- Крылов А.П., Белаш П.М., Борисов Ю.П., Бучин А.Н., Воинов В.В., Глоговский М.М., Максимов М.И., Николаевский Н.М., Розенберг М.Д. (1962). Проектирование разработки нефтяных месторождений. М.: Гостехиздат, 430 с.
- Крылов А.П., Глоговский М.М., Мирчинк М.Ф., Николаевский Н.М., Чарный И.А. (1948). Научные основы разработки нефтяных месторождений. М.: Гостехиздат, 416 с.
- Мазо А.Б., Поташев К.А. (2020). Суперэлементы. Моделирование разработки нефтяных месторождений: Монография. М.: ИНФРА-М, 220 с.
- Мазо А.Б., Поташев К.А., Баушин В.В., Булыгин Д.В. (2017). Расчет полимерного заводнения нефтяного пласта по модели фильтрации с фиксированной трубкой тока. *Георесурсы*, 19(1), с. 15–20. <https://doi.org/10.18599/grs.19.1.3>
- Мазо А.Б., Булыгин Д.В. (2011). Суперэлементы. Новый подход к моделированию разработки нефтяных месторождений. *Нефть. Газ. Новации*, 11, с. 6–8.
- Поташев К.А., Ахунов Р.Р. (2020). Оценка неоднородности притока пластового флюида к контуру поперечного сечения вертикальной скважины. *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*, 162(2), с. 180–192.
- Поташев К.А., Мазо А.Б., Рамазанов Р.Г., Булыгин Д.В. (2016). Анализ и проектирование разработки участка нефтяного пласта с использованием модели фиксированной трубки тока. *Нефть. Газ. Новации*, 187(4), с. 32–40.
- Сургучев М.Л., Желтов Ю.В., Симкин Э.М. (1984). Физико-химические микропроцессы в нефтегазоносных пластах. М.: Недра, 215 с.
- Чарный И.А. (1948). Подземная гидромеханика. М.-Л.: Гостехиздат, 196 с.

Чарный И.А. (1963). Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостехиздат, 397 с.

Шелепов В.В., Булыгин Д.В., Мазо А.Б., Поташев К.А., Рамазанов Р.Г. (2016). TubeGeo, версия 1.0. «Моделирование геолого-технических мероприятий методом трубок тока». Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016611381 от 01.02.2016 г.

Al-Najem A.A., Siddiqui S., Soliman M., Yuen B. (2012). Streamline Simulation Technology: Evolution and Recent Trends. *Society of Petroleum Engineers*. <https://doi.org/10.2118/160894-MS>

Aziz K., Settari A. (1979). Petroleum reservoirs simulation. London: Appl. Sci. Publ., 476 p.

Baek M., Hewett T.A. (2000). A Hybrid Streamtube Simulator Using A Semianalytical Method. *Society of Petroleum Engineers*. <https://doi.org/10.2118/63151-MS>

Christie M. A. (1996). Upscaling for reservoir simulation. *J. Petroleum Technology*, 48, pp. 1004–1010. <https://doi.org/10.2118/37324-JPT>

Emanuel A.S., Alameda G.K., Behrens R.A., Hewett T.A. (1989). Reservoir Performance Prediction Methods Based on Fractal Geostatistics. *Society of Petroleum Engineers*. <https://doi.org/10.2118/16971-PA>

Emanuel A.S., Milliken W.J. (1997). Application of Streamtube Techniques to Full-Field Waterflood Simulation. *Society of Petroleum Engineers*. <https://doi.org/10.2118/30758-PA>

Hewett T., Behrens R. (1991). Scaling Laws in Reservoir Simulation and Their Use in a Hybrid Finite Difference / Streamtube Approach to Simulation the Effects of Permeability Heterogeneity, Reservoir Characterization, II, L. Lake, and J. Carroll, H.B. (eds.). London: Academic Press, Inc. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-434066-4.50022-9>

Higgins R.V., Leighton A.J. (1961). Performance of Five-Spot Water Floods in Stratified Reservoirs Using Streamlines. *Society of Petroleum Engineers*. <https://doi.org/10.2118/57-MS>

Higgins R.V., Leighton A.J. (1962). A Computer Method to Calculate Two Phase Flow in Any Irregularly Bounded Porous Medium. *Journal of Petroleum Technology*, June, pp. 679–683. <https://doi.org/10.2118/243-PA>

Lake L.W., Johnston J.R., and Stegemeier G.L. (1981). Simulation and Performance Prediction of a Large-Scale Surfactant / Polymer Project. *Society of Petroleum Engineers*. <https://doi.org/10.2118/7471-PA>

Martin J.C., Wegner R.E. (1979). Numerical Solution of Multiphase, Two-Dimensional Incompressible Flow Using Streamtube Relationships. *Society of Petroleum Engineers*. <https://doi.org/10.2118/7140-PA>

Renard G. (1990). A 2D Reservoir Streamtube EOR Model with Periodical Automatic Regeneration of Streamlines. *In Situ*, 14(2), pp. 175–200.

Spirina E.A., Potashev K.A., Mazo A.B. (2019). Evaluation of the reliability of the averaging over the reservoir thickness for the model with a fixed streamtube. *Conf. Series: J. of Physics*, 1158 042024, pp. 1–6. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/4/042024>

Thiele M.R. (1994). Modeling Multiphase Flow in Heterogeneous Media Using Streamtubes. *PhD Dissertation*. 217 p.

Willhite G.P. (1986). Waterflooding. SPE Textbook Series. Richardson, TX. 331 p.

## Сведения об авторах

Константин Андреевич Поташев – доктор физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой аэрогидромеханики Казанского федерального университета

Россия, 420008, Казань, ул. Кремлевская, д. 35

Александр Бенцианович Мазо – доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры аэрогидромеханики Казанского федерального университета

Россия, 420008, Казань, ул. Кремлевская, д. 35

Статья поступила в редакцию 26.05.2020;  
Принята к публикации 21.08.2020; Опубликована 11.12.2020

IN ENGLISH

# Numerical modeling of local effects on the petroleum reservoir using fixed streamtubes for typical waterflooding schemes

K.A. Potashev\*, A.B. Mazo

Kazan Federal University, Kazan, Russian Federation

\*Corresponding author: Konstantin A. Potashev, e-mail: KPotashev@mail.ru



**Abstract.** The difficulty of numerical modeling of areal methods of flows redistribution in the oil reservoir is the need for detailed resolution of local hydrodynamic effects and the fine geological structure of the reservoir, which are centimeter-wide, at inter-well distances of the order of several hundred meters. The dimension of computational grids of traditional 3D models of such resolution, even for impact areas containing a small number of injection and production wells, turns out to be excessively large for design calculations. To overcome these limitations, it is proposed to perform a detailed simulation of the flow in two-dimensional cross sections of the reservoir along fixed streamtubes of variable width between each pair of interacting injector and producer wells. Reducing the dimension of the problem allows the use of high-resolution grids to simulate short-term local effects.

In this paper, we present an algorithm for constructing a single fixed streamtube between injector and producer, which provides a minimum error in calculating of flow rate and water cut using a two-phase flow problem of reduced dimension along the streamtube. The algorithm is demonstrated by the example of the two-dimensional two-phase flow problem neglecting capillary and gravitational forces in a homogeneous reservoir of constant thickness for three waterflooding elements corresponding to seven vertical well flooding patterns – standard and inverted four-spot, five-spot and seven-spot, as well as staggered line drive. For these waterflooding elements, efficient streamtubes have been constructed, the relative width of which is approximated by piecewise linear functions. On the example of a staggered line drive or five-spot well patterns, the width of the effective streamtube was parameterized for an arbitrary ratio of the sides of the waterflood element. Presented streamtubes can be used as ready templates for subsequent modeling of geological and technical treatments in the relevant elements of the water flooding of the oil reservoir.

**Keywords:** oil reservoir, two-phase flow in porous media, geological and technical treatments, fixed stream tube, well patterns, numerical simulation, high-speed models, high-resolution models

**Recommended citation:** Potashev K.A., Mazo A.B. (2020). Numerical modeling of local effects on the petroleum reservoir using fixed streamtubes for typical waterflooding schemes. *Georesursy = Georesources*, 22(4), pp. 70–78. DOI: <https://doi.org/10.18599/grs.2020.4.70-78>

#### Acknowledgments

The work was carried out as part of the implementation of the development program for the Scientific and Educational Mathematical Center of the Volga Federal District, agreement No. 075-02-2020-1478.

#### References

- Al-Najem A.A., Siddiqui S., Soliman M., Yuen B. (2012). Streamline Simulation Technology: Evolution and Recent Trends. *Society of Petroleum Engineers*. <https://doi.org/10.2118/160894-MS>
- Aziz K., Settari A. (1979). Petroleum reservoirs simulation. London: Appl. Sci. Publ., 476 p.
- Baek M., Hewett T.A. (2000). A Hybrid Streamtube Simulator Using A Semianalytical Method. *Society of Petroleum Engineers*. <https://doi.org/10.2118/63151-MS>
- Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.N. (1984). Physical and chemical underground hydrodynamics of oil reservoir. Moscow: Nedra, 211 p. (In Russ.)
- Bulygin D.V., Mazo A.B., Potashev K.A., Kalinin E.I. (2013). Geological and technical aspects of superelement model of oil reservoirs. *Georesursy = Georesources*, 53(3), pp. 31–35. <https://doi.org/10.18599/grs.53.3.10>
- Charny I. A. (1948). Underground hydromechanics. Moscow-Leningrad: Gostekhizdat, 196 p. (In Russ.)
- Charny I.A. (1963). Underground hydrodynamics. Moscow: Gostoptekhizdat, 397 p. (In Russ.)

Christie M. A. (1996). Upscaling for reservoir simulation. *J. Petroleum Technology*, 48, pp. 1004–1010. <https://doi.org/10.2118/37324-JPT>

Emanuel A.S., Alameda G.K., Behrens R.A., Hewett T.A. (1989). Reservoir Performance Prediction Methods Based on Fractal Geostatistics. *Society of Petroleum Engineers*. <https://doi.org/10.2118/16971-PA>

Emanuel A.S., Milliken W.J. (1997). Application of Streamtube Techniques to Full-Field Waterflood Simulation. *Society of Petroleum Engineers*. <https://doi.org/10.2118/30758-PA>

Hewett T., Behrens R. (1991). Scaling Laws in Reservoir Simulation and Their Use in a Hybrid Finite Difference / Streamtube Approach to Simulation the Effects of Permeability Heterogeneity, Reservoir Characterization, II, L. Lake, and J. Carroll, H.B. (eds.). London: Academic Press, Inc. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-434066-4.50022-9>

Higgins R.V., Leighton A.J. (1961). Performance of Five-Spot Water Floods in Stratified Reservoirs Using Streamlines. *Society of Petroleum Engineers*. <https://doi.org/10.2118/57-MS>

Higgins R.V., Leighton A.J. (1962). A Computer Method to Calculate Two Phase Flow in Any Irregularly Bounded Porous Medium. *Journal of Petroleum Technology*, June, pp. 679–683. <https://doi.org/10.2118/243-PA>

Krylov A.P., Belash P.M., Borisov YU.P., Buchin A.N., Voinov V.V., Glogovskij M.M., Maksimov M.I., Nikolaevskij N.M., Rozenberg M.D. (1962). Oilfield engineering. Moscow: Gostoptekhizdat, 430 p. (In Russ.)

Krylov A.P., Glogovskij M.M., Mirchink M.F., Nikolaevskij N.M., Charnyj I.A. (1948). Scientific Basics of Oilfield Development. Moscow: Gostoptekhizdat, 416 p. (In Russ.)

Lake L.W., Johnston J.R., and Stegemeier G.L. (1981). Simulation and Performance Prediction of a Large-Scale Surfactant / Polymer Project. *Society of Petroleum Engineers*. <https://doi.org/10.2118/7471-PA>

Martin J.C., Wegner R.E. (1979). Numerical Solution of Multiphase, Two-Dimensional Incompressible Flow Using Streamtube Relationships. *Society of Petroleum Engineers*. <https://doi.org/10.2118/7140-PA>

Mazo A.B., Bulygin D.V. (2011). Superelements. New approach to oil reservoir simulation. *Neft. Gaz. Novatsii*, 11, pp. 6–8. (In Russ.)

Mazo A.B., Potashev K.A. (2020). Superelements. Petroleum reservoir simulation. Moscow: Infra-M, 220 p. (In Russ.)

Mazo A.B., Potashev K.A., Baushin V.V., Bulygin D.V. (2017). Numerical Simulation of Oil Reservoir Polymer Flooding by the Model of Fixed Stream Tube. *Georesursy = Georesources*, 19(1), pp. 15–20. <https://doi.org/10.18599/grs.19.1.3>

Potashev K.A., Mazo A.B., Ramazanov R.G., Bulygin D.V. (2016). Analysis and design of a section of an oil reservoir using a fixed stream tube model. *Neft. Gaz. Novatsii*, 187(4), pp. 32-40. (In Russ.)

Renard G. (1990). A 2D Reservoir Streamtube EOR Model with Periodical Automatic Regeneration of Streamlines. *In Situ*, 14(2), pp. 175–200.

Shelepov V.V., Bulygin D.V., Mazo A.B., Potashev K.A., Ramazanov R.G. (2016). TubeGeo, version 1.0. Modeling of geological and technical treatments by the method of srteamtubes. Software Registration Certificate No. 2016611381. (In Russ.)

Spirina E.A., Potashev K.A., Mazo A.B. (2019). Evaluation of the reliability of the averaging over the reservoir thickness for the model with a fixed streamtube. *Conf. Series: J. of Physics*, 1158 042024, pp. 1–6. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/4/042024>

Surguchev M.L., Zheltov YU.V., Simkin E.M. (1984). Physicochemical microprocesses in oil and gas reservoirs. Moscow: Nedra, 215 p. (In Russ.)

Thiele M.R. (1994). Modeling Multiphase Flow in Heterogeneous Media Using Streamtubes. *PhD Dissertation*. 217 p.

Willhite G.P. (1986). Waterflooding. SPE Textbook Series. Richardson, TX. 331 p.

#### About the Authors

*Konstantin A. Potashev* – Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of the Department of Aerohydromechanics Kazan Federal University  
35 Kremlevskaya st., Kazan, 420008, Russian Federation

*Alexander B. Mazo* – Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, Department of Aerohydromechanics Kazan Federal University  
35 Kremlevskaya st., Kazan, 420008, Russian Federation

Manuscript received 26 May 2020;

Accepted 21 August 2020; Published 11 December 2020