В.И. Башков[1], *М.А. Малахальцев*[2]

[1]*Кафедра теории относительности и гравитации, Казанский университет*

[2]*Кафедра геометрии, Казанский университет*

Victor.Bashkov@ksu.ru, Mikhail.Malakhaltsev@beauty.ksu.ru

ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО И СОВРЕМЕННОЕ НАУЧНОЕ МИРОВОЗЗРЕНИЕ

Неевклидова геометрия, история ее создания и развития, судьбы ее творцов находились и находятся в центре внимания историков математики, всего математического сообщества. Это неудивительно, поскольку открытие геометрии, отличной от евклидовой, привело не только, и не столько к преобразованию математической теории, но к кардинальному преобразованию мировоззрения человечества, философской картины мира. Можно смело утверждать, что мышление наших современников, даже тех, кто и не слышал о геометрии Лобачевского, сформировано под влиянием этого открытия.

В рамках короткой заметки, конечно, невозможно подробно рассказать ни об истории неевклидовой геометрии, ни раскрыть ее содержание. Впрочем, в настоящее время существует обширная литература на эту тему, для первого ознакомления можно посоветовать книги (Норден, 1953; Васильев, 1992). Поэтому, наша цель здесь лишь попытаться в какой-то мере раскрыть значение открытия неевклидовой геометрии.

Сейчас уже трудно сказать, когда впервые человечество задумалось о необходимости логического обоснования математических правил. В течение долгого времени эти правила — фактически, результаты непосредственного опыта — передавались от поколения к поколению, сначала как тайные знания жрецов древнего Египта, потом как прикладные знания, необходимые для разметки земель и строительства различных сооружений. Исторические памятники, сохранившиеся до наших дней, свидетельствуют, что люди их создавшие владели геометрическими методами не хуже выпускников современной средней школы. Тем не менее, структура этих знаний была отлична от современной, не было той стройной логической системы, которой отличается современная математика. Вероятно в такой системе просто не было необходимости. Почему же такая необходимость появилась, в какой конкретной форме было первоначально осуществлено построение теории – вопрос непростой и достаточно активно обсуждаемый и в настоящее время (здесь стоит отметить одно из последних исследований (Pont, 1986)).

Первое сочинение, дошедшее до нас, но не непосредственно, а после многочисленных переписываний, есть «Начала» Евклида. В ней геометрия впервые предстает в виде логической системы, опирающейся на ряд утверждений, принимаемых без доказательства, названных аксиомами и постулатами (отметим, что различие между постулатами и аксиомами обсуждается, например, в (Pont, 1986)). В частности, формулируется и V постулат, гласящий (в современной формулировке), что через точку проходит не более одной прямой, не пересекающей данную. Этот постулат формулировался сложнее первых четырех, причем само утверждение о том, что (см. рис. 1) при $\alpha + \beta < 180°$, прямая l обязательно пересечет l' (другая формулировка этого же постулата) не столь очевидно, как, например, утверждение, что через две точки проходит единственная прямая.

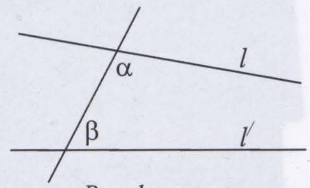

Рис. 1.

Стоит еще отметить, что в то время эти утверждения воспринимались как законы, непосредственно относящиеся к физическому миру, недаром Евклид дает определения (объяснения) объектов, с точки зрения современной геометрии “неопределяемых”, например, “точка есть то, что не имеет частей”. Естественным было стремление минимизировать количество основных законов, взятых из непосредственной практики.

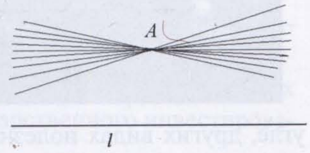

Рис. 2. В неевклидовой геометрии через точку, не лежащую на прямой l, можно провести бесконечно много прямых, не пересекающих l.

Еще во времена Евклида было предложено несколько доказательств V постулата, однако вскоре выяснилось, что они содержат ошибки. Попытки доказать V постулат продолжались около двух тысяч лет (что интересно, дилетанты еще и сегодня пытаются его доказать), однако каждый раз при внимательном анализе в доказательстве обнаруживались ошибки. Сложилась даже некоторая традиция — работа, посвященная доказательству пятого по-

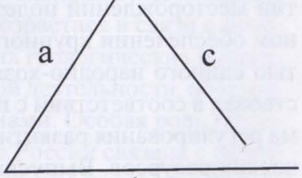

Рис. 3. Прямая, проходящая через точку внутри угла, не пересекает стороны этого угла.

Рис. 4. Псевдосфера — поверхность, на которой локально реализуется геометрия Лобачевского.

стулата, состояла из двух частей:

1) разбор ошибок в доказательствах предшественников,

2) новое, на этот раз абсолютно истинное, доказательство *V* постулата.

Естественно, что в очередной работе пункт 2) переходил в пункт 1), и "старое начиналось сызнова". К началу XIX века сложилась "патовая ситуация": евклидова геометрия была образцом строгости и стройности построения научной теории, она успешно применялась на практике, никто не сомневался в том, что она верно описывает законы мира (да и повода не было усомниться), оставалось лишь одно досадное недоразумение — *V* постулат, но он никак не хотел поддаваться усилиям математиков! Недаром Яноша Бойяи предостерегал отец, что размышления над загадкой *V* постулата его погубят, и хотя Янош и разгадал эту загадку, так оно и вышло…

Впрочем, вскоре проблема *V* постулата была решена, но совсем не так, как ожидалось — оказалось, что его невозможно доказать! Именно, трое ученых: Я. Бойаи, К.Ф. Гаусс и Н.И. Лобачевский пришли к выводу, что существует геометрия, в которой пятый постулат не выполняется, то есть, существует неевклидова (отличная от евклидовой) геометрия.

Первооткрыватели неевклидовой геометрии были, без сомнения, духовно мужественными людьми. Ведь новая геометрия прямо противоречила всем представлениям о пространстве. Уже само отрицание *V* постулата — "*V* постулат неевклидовой геометрии" — влечет существование не двух, а бесконечного множества прямых, проходящих через данную точку и не пересекающих данную прямую (рис. 2).

Но это только начало. Оказалось, что в новой геометрии сумма углов треугольника непостоянна и меньше 180^0, что любые два подобных треугольника равны, через точку внутри угла можно провести прямую, не пересекающую стороны этого угла!

Каждый шаг, каждый новый факт прямо противоречил наглядным геометрическим представлениям, человеческой природе восприятия мира. И, несмотря на это, и Я. Бойаи, и К.Ф. Гаусс, и Н.И. Лобачевский нашли мужество сделать вывод, что такая геометрия действительно существует!

Но силы человека ограничены, и новое знание дается нелегко. Трагически сложилась судьба Я. Бойаи, отказывался обсуждать публично тему неевклидовой геометрии К.Ф. Гаусс. Слишком непросто приходится тем, кто сталкивается с принципиально новым, и странно слышать слова осуждения Гаусса от людей, перед которыми никогда не стояла мировоззренческая, подчеркнем, не математическая, а именно мировоззренческая проблема такого масштаба.

Мы можем лишь поразиться личному мужеству Николая Ивановича Лобачевского, который, несмотря на непонимание современников и даже их удивление тому, что столь уважаемый человек, ректор Казанского университета, позволяет себе настаивать на существовании какой-то воображаемой геометрии, последовательно публиковал работы по неевклидовой геометрии. Он приводил новые доказательства ее существования, показал, что евклидова геометрия является предельным случаем неевклидовой, стремился развить новую геометрию столь же глубоко, как была развита в его время евклидова геометрия.

Вскоре после смерти Лобачевского было замечено, что неевклидова геометрия локально реализуется, как внутренняя геометрия поверхностей отрицательной кривизны, например, псевдосферы, рис. 4 (кстати, понятие "внутренняя геометрия поверхности" было введено К.Ф. Гауссом).

Отметим, что это только локальная реализация, то есть плоскость Лобачевского целиком нельзя представить как поверхность в трехмерном евклидовом пространстве (теорема Ефимова), и в этом смысле неверно говорить, что геометрия Лобачевского есть геометрия поверхности. Геометрия Лобачевского сложнее, и это еще раз показывает, с какими трудностями пришлось столкнуться создателям неевклидовой геометрии.

Позже были найдены и другие модели и интерпретации геометрии Лобачевского, в частности, в рамках проективной геометрии, и все это привело к самому, на наш взгляд, важному результату открытия неевклидовой геометрии. Было осознано, что мы в процессе познания строим различные модели мира: геометрическую, физическую и т.д., но модель не тождественна миру, она лишь отражает или интерпретирует некоторые его свойства. Геометрия же изучает уже не непосредственно мир, а одну из его моделей. В окончательном виде это понимание было зафиксировано Д. Гильбертом, который создал современную аксиоматику геометрии, ввел неопределяемые понятия и сформулировал аксиомы, как "правила игры" с этими понятиями, то есть, фактически, как заранее заданные свойства математической модели. Объясняя свою мысль, он говорил, что мы можем считать точки пивными кружками, а прямые — столами, главное, чтобы выполнялись аксиомы. Впоследствии это привело к пониманию математики как науки, изучающей математические структуры. Наиболее последовательно эта точка зрения проведена Н. Бурбаки в его знаменитых "Elementes de Mathematique" ("Элементы математики" — основные составляющие части, основания математики) уже во второй половине XX века. Этот труд и подвел итог, по крайней мере, с современной точки зрения, столетней работы по освоению неевклидовой геометрии.

Подведем итог и мы. В результате открытия неевклидовой геометрии:

1. Евклидова геометрия стала математической теорией, то есть одной из возможных математических моделей окружающего мира.

2. Произошло окончательное самоопределение математики как науки, изучающей математические структуры мира. Появилось современное понимание систем аксиом и понятие модели.

3. Была осознана невозможность построения единой окончательной модели мира и одновременно необходимость поиска связи между различными моделями — связи, обусловленной единством мира.

Литература

Норден А.П. *Элементарное введение в геометрию Лобачевского.* М. Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры, 1953.

Васильев А.В. *Николай Иванович Лобачевский.* М. Наука. 1992.

Pont J.C. *L'aventure des paralleles*, PeterLang, Berne, 1986.