А.Я. Чилап
Казанский государственный энергетический университет, Казань
kgeu@kgeu.ru

К СОГЛАСОВАНИЮ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ

При физическом моделировании явлений и процессов весьма желательно помимо геометрического подобия соблюсти и подобие по некоторым критериям, отражающим влияние на происходящее в модели и в натуре тех или иных факторов. Известно, однако, что зачастую эти критерии приводят к противоречащим друг другу рекомендациям. Так, например, критерий частичного подобия с учётом вязкости (число Рейнольдса $Re=\upsilon l/\nu$) при одинаковых вязкостях потока жидкости в модели и натуре требует выполнения условия подобия $\upsilon_1 l_1=\upsilon_2 l_2$, т.е. при уменьшении размеров модели по сравнению с натурой в L раз надо во столько же раз увеличить скорость в ней, а критерий Фруда $Fr=\upsilon^2/gl$, учитывающий влияние силы тяжести, при уменьшении модели в L раз требует уменьшить скорость течения в $\sqrt{L}$ раз, т.к. его выполнение равносильно выполнению равенства $\upsilon_1^2/l_1=\upsilon_2^2/l_2$.

Обычно, в зависимости от степени важности для конкретной задачи, теми или иными критериями в связи с этим приходится жертвовать.

Покажем далее на примере трёх критериев Re, *Fr и Ho* (критерий гомохронности: $Ho=\upsilon t/l$, учитывающий желательную синхронность $t_1=t_2$ и приводящий к условию $\upsilon_1/l_1=\upsilon_2/l_2$, т.е. к требованию при уменьшении размеров в L раз, во столько же раз уменьшить скорость), как можно их согласовать.

Такое согласование носит вероятностный характер, т.е. указывает, с какой вероятностью следует учитывать каждый из критериев, и позволяет подсчитать математическое ожидание рекомендаций: во сколько раз и в какую сторону целесообразно изменить скорость при уменьшении размера, исходя из оптимального в некотором смысле принципа выбора решения в условиях неопределенности.

Этим, уже широко признанным принципом, является минимаксный подход (Льюс и Райфа, 1961), диктующий такой выбор решения, который по возможности минимизировал бы потери, связанные с неоптимальным выбором.

Обозначим $\upsilon\uparrow$ – увеличение, а $\upsilon\downarrow$ – уменьшение скорости в указываемое за стрелочкой количество раз при уменьшении модели в L раз. В качестве функции потерь возьмём число, показывающее во сколько раз мы ошибёмся, если примем одну рекомендацию, тогда как следовало бы принять другую.

Выбираемым рекомендациям будут соответствовать столбцы, а тем, которые следовало бы выбрать, - строки приводимой таблицы (матрицы). Так, если мы выберем рекомендацию $\upsilon\uparrow L$, и её действительно следовало выбрать, то наши потери будут равны нулю. Если же следовало выбрать (но нам это неизвестно) $\upsilon\downarrow L$, то, тем самым, мы ошибёмся в L^2 раз, и таковы же будут наши потери.

	$\upsilon\uparrow L$	$\upsilon\downarrow\sqrt{L}$	$\upsilon\downarrow L$
$\upsilon\uparrow L$	0	$L^{3/2}$	L^2
$\upsilon\downarrow\sqrt{L}$	$L^{3/2}$	0	$L^{1/2}$
$\upsilon\downarrow L$	L^2	$L^{1/2}$	0

Так поставленная задача называется выбором решения в условиях неопределенности. Известно, что она эквивалентна т.н. матричной игре с указанной матрицей, в которой минимизирующий игрок выбирает решение (стратегию) в виде вероятностного оптимального распределения указанных столбцов, а максимизирующий – строк матрицы. Результатом выбора обоими соответственно симплексов

$$Y_0=(y_1,y_2,y_3)(y_1,y_2,y_3\geq 0,\ y_1+y_2+y_3=1),$$

$$X_0=(x_1,x_2,x_3)(x_1,x_2,x_3\geq 0,\ x_1+x_2+x_3=1)$$

явится математическое ожидание потерь $E(X_0,Y_0)=V$ (значение игры) минимизирующего, и одновременно выигрышей – максимизирующего игрока.

Можно убедиться, что, например, при $L=4$ для указанной матрицы $V=64/11$, $x_2=0$, $y_3=0$, $x_1=7/11$, $x_3=4/11$, $y_1=3/11$, $y_2=8/11$. Математическим ожиданием оптимальной рекомендации будет $E_y=y_1\cdot\uparrow L+y_2\cdot\downarrow\sqrt{L}=16/11$, т.е. целесообразно (в среднем, при нескольких опытах) для $L=4$ увеличить скорость в 16/11 раза. Для произвольного L $E_y=L^{5/2}/(L^2+L^{3/2}-L^{1/2})$.

Литература

Льюс Р., Райфа Х. *Игры и решения*. М. 1961.

Анатолий Яковлевич Чилап

Профессор КГЭУ, доктор ф.-м.н. Область научных интересов – теория и приложения математических методов принятых решений.