

Определение поля проницаемости пласта по замерам давления на скважинах с использованием сплайн-функции

А.В. Елесин*, А.Ш. Кадырова, А.И. Никифоров
Институт механики и машиностроения ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Россия

Рассматривается задача идентификации проницаемости пласта по известным значениям давления на скважинах в условиях однофазной фильтрации жидкости. Поле проницаемости идентифицируется в классе сплайн-функций из решения обратной коэффициентной задачи для уравнения фильтрации. Задача идентификации сводится к задаче минимизации функции невязки, имеющий вид суммы квадратов разности между значениями давления, известными по замерам на скважинах и полученными с помощью численной модели. Минимизации функции невязки проводится методом Левенберга-Марквардта. Приводятся решения модельных задач идентификации проницаемости для двухмерного пласта, вскрытого системой добывающих и нагнетательных скважин. Вычисленные поля проницаемости близки к истинным полям. На примере задачи с погрешностями в замерах давления показана устойчивость решения.

Ключевые слова: идентификация проницаемости, сплайн-функция, минимизация функции невязки

Для цитирования: Елесин А.В., Кадырова А.Ш., Никифоров А.И. (2018). Определение поля проницаемости пласта по замерам давления на скважинах с использованием сплайн-функции. *Георесурсы*, 20(2), с. 102-107. DOI: <https://doi.org/10.18599/grs.2018.2.102-107>

Введение

При решении задач однофазной фильтрации жидкости должно быть известно поле проницаемости пласта. На практике проницаемость обычно определяется только в отдельных точках пласта гидродинамическими методами или по результатам исследований кернов. В данной работе поле проницаемости идентифицируется в классе сплайн-функций из решения обратной коэффициентной задачи для уравнения фильтрации. Методы решения обратных коэффициентных задач делятся на явные и неявные (Sun, 1994). В явных методах значения параметров определяются из решения нелинейной системы уравнений (Голубев и др., 1978; Зиновьев, 1984). В этом случае поле давления должно быть известно. Если значения давления известны только на скважинах, то значения параметров определяются только в прискважинных областях. В неявных методах для определения значений параметров всего пласта строятся итерационные процедуры, в которых используются значения давления только на скважинах (Neuman, Carrera, 1986; Хайруллин и др., 2006; Елесин и др., 2009; Хайруллин и др., 2017). В отличие от предлагаемого подхода в этих работах параметры пласта представляются в виде кусочно-постоянных функций.

Использование сплайн-функций является одним из методов параметризации (Sun, 1994), и при этом для получаемого поля проницаемости, в большинстве случаев, не требуется дальнейшая обработка и корректировка и оно легко и однозначно может быть пересчитано на любую сетку. Для решения обратных задач помимо данных, необходимых для решения прямой гидродинамической

задачи, используется дополнительная информация. В настоящей работе в качестве такой информации берутся забойные давления, которые известны наряду с дебитами скважин. Значения дебита используются при решении прямой задачи для определения поля давления. Известные значения давления на скважинах входят в функцию невязки, в процессе минимизации которой определяется поле проницаемости пласта. Для минимизации функции невязки используется классический метод Левенберга-Марквардта. Исследуется устойчивость решения к погрешностям в замерах давления.

Постановка задачи

Однофазная стационарная фильтрация в двухмерном пласте Ω описывается уравнением (Азиз, Сеттари, 1982; Басниев и др., 1986):

$$\nabla(\sigma \nabla p) = q, \quad (1)$$

где $\sigma = kh/\mu$ – коэффициент гидропроводности, k – проницаемость, h – толщина пласта, μ – вязкость жидкости,

p – давление, $q = \sum_{i=1}^M Q_i \delta(x_i, y_i)$, Q_i , (x_i, y_i) – дебит и координаты i -ой скважины, M – число скважин, $\sigma(x_i, y_i)$ – дельта-функция. Для уравнения (1) задаются граничные условия:

$$p|_{\Gamma_1} = p_r, \quad \frac{\partial p}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma_2} = w, \quad (2)$$

где $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$ – граница пласта Ω , \vec{n} – вектор нормали к границе пласта, w – нормальная составляющая скорости фильтрации.

Уравнение (1) с граничными условиями (2) решается численно. Для аппроксимации по пространственным переменным используется метод контрольных объемов

* Ответственный автор: Андрей Викторович Елесин
E-mail: elesin@imm.knc.ru

на прямоугольной сетке. Полученная система линейных алгебраических уравнений решается методом сопряженных градиентов с предобуславливанием в виде неполного разложения Холецкого (Голуб, Ван Лоун, 1999; Hill, 1990; Larabi, De Smedt, 1994).

Определение поля давления из решения (1)-(2) является прямой задачей. Обратная задача заключается в определении значений проницаемости во всех контрольных объемах по известным в отдельных точках значениям давления. Для получения единственного решения обратной задачи необходимо, чтобы число идентифицируемых параметров не превышало число известных значений давления. Так как при решении практических задач число контрольных объемов, покрывающих расчетную область (пласт Ω), намного больше числа известных значений давления, то для уменьшения числа идентифицируемых параметров обычно используются два подхода. В первом подходе расчетная область разбивается на зоны, каждая из которых характеризуется постоянным значением проницаемости. Во втором подходе используются различные варианты интерполяции. Сначала определяются значения проницаемости в узлах интерполяции, а остальные значения получаются интерполированием по всей расчетной области. В данной работе в отличие от второго подхода в ходе решения обратной задачи непосредственно восстанавливается поле проницаемости в виде сплайн-функции (Ашкеназы, 2003; Harder, Desmarais, 1972), число определяющих параметров которой соответствует количеству скважин с известным забойным давлением.

Интерполяция сплайн-функцией

Допустим, что в точках $P_i(x_i, y_i)$, $i=1, n$, двумерной области известны значения некоторой величины a_i . Задача интерполяции состоит в том, чтобы построить сплайн-функцию $\varphi(x, y)$ (сплайн-поверхность), определенную на всей области так, чтобы её значения в точках P_i совпали со значениями a_i . Точки P_i называются узлами интерполяции. Интерполяция сплайн-поверхностью имеет простой механический смысл. Сплайн-поверхность есть модель упругой тонкой пластинки, изогнутой под воздействием внешних сил, приложенных в точках P_i . Нахождение такой сплайн-поверхности сводится к решению вариационной задачи о нахождении минимума свободной энергии тонкой пластинки. Уравнение сплайн-поверхности имеет вид:

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i r_i^2 \ln r_i^2 + c_{n+1} + c_{n+2}x + c_{n+3}y, \quad (3)$$

где $r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$. Для определения коэффициентов c_i , $i=1, n+3$, сплайн-функции $\varphi(x, y)$ необходимо решить систему уравнений:

$$\varphi(x_i, y_i) = a_i, \quad i=q, n,$$

$$\sum_{i=1}^n c_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n x_i c_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n y_i c_i = 0$$

Для $n > 3$ решение этой системы существует, причем решение является единственным, если среди точек (x_i, y_i) , $i=1, N$, имеются хотя бы три точки, не лежащие на одной прямой (Ашкеназы, 2003).

Метод решения обратной задачи

Часто используемым методом решения обратных коэффициентных задач является сведение их к задачам минимизации функции невязки (Sun, 1994). В данной работе функция невязки строится по известным значениям давления и имеет вид:

$$J(\mathbf{K}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M (p_j - p_j^*)^2, \quad (4)$$

где \mathbf{K} – управляющий вектор, аргументы которого $\tilde{k}_i = \ln k_i$, k_i – значения проницаемости в узлах интерполяции сплайн-функции, p_j, p_j^* – значения давления, полученные в результате решения уравнения (1), и известные по замерам на скважинах, M – число известных значений давления.

Процесс минимизации проводится в два этапа. На первом этапе проницаемость всего пласта считается постоянной и определяется в процессе минимизации функции невязки градиентным методом (Пантелеев, Летова, 2005). На каждой итерации градиентного метода пересчет проницаемости проводится по формуле:

$$\mathbf{K}^n = \mathbf{K}^{n-1} - \rho \mathbf{g},$$

где \mathbf{g} – градиент функции невязки, шаг ρ определяется методом золотого сечения. Полученное значение проницаемости далее используется в качестве начального значения. На втором этапе значения проницаемости в узлах интерполяции определяются в процессе минимизации функции невязки методом Левенберга-Марквардта (Азиз, Сеттари, 1982; Дэннис, Шнабель, 1988; Пантелеев, Летова, 2005). Новые значения параметров на каждой итерации метода Левенберга-Марквардта вычисляются по формуле:

$$\mathbf{K}^n = \mathbf{K}^{n-1} - (\mathbf{H} + \mu_n \mathbf{E})^{-1} \mathbf{g},$$

где \mathbf{E} – единичная матрица, $\mathbf{H} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ – приближённая

матрица вторых производных, $\mathbf{A} = \left\{ \frac{\partial p_j}{\partial \tilde{k}_i} \right\}$ – матрица

чувствительности, μ_n – параметр Марквардта, n – номер итерации. Начальное значение параметра Марквардта выбирается на порядок больше максимального сингулярного числа матрицы \mathbf{H} . В случае уменьшения функции невязки на текущей итерации $J(\mathbf{K}^n) < J(\mathbf{K}^{n-1})$ параметр Марквардта уменьшается в два раза, в случае нарушения условия убывания параметр Марквардта увеличивается в два раза до тех пор, пока это условие не выполнится. Затем осуществляется переход на новую итерацию. Элементы матрицы чувствительности вычисляются численно.

Остановка процесса минимизации функции невязки проводилась по выполнению одного из двух критериев: достижения заданной точности по замерам давления $\max_{j=1, M} |p_j - p_j^*| < \delta$ или медленная сходимость процесса минимизации $J^n - J^{n+1} < 0,01J^n$ в течение 3 итераций.

Модельные задачи

В модельных задачах всегда известно точное решение. Это позволяет проводить тестирование методов решения и оценивать достаточность исходных данных для получения точного решения. Модельные задачи идентификации

проницаемости пласта строятся следующим образом. Сначала выбираются точки пласта (узлы интерполяции), в которых задаются значения проницаемости. По этим значениям строится сплайн-функция (3), и вычисляется поле проницаемости всего пласта, которое и принимается за истинное поле проницаемости. Затем из решения уравнения (1) с использованием формулы Писмана (Reacetan, 1978) определяются значения давления на скважинах. После этого считается, что значения проницаемости неизвестны, и требуется их определить в процессе минимизации функции невязки (4) по известным значениям давления на скважинах.

Модельная задача 1

Рассматривается прямоугольный пласт размерами 2000 м × 2000 м мощностью 10 м, вскрытый 5 нагнетательными и 20 добывающими скважинами. Радиус скважин 0,1 м. На границе пласта задано давление 20 МПа. Вязкость жидкости 10 мПа·с. Координаты скважин, их дебиты и заданные значения проницаемости k_{tr} приведены в табл. 1. Координаты узлов интерполяции сплайн-функции совпадают с координатами скважин (Рис. 1). Для аппроксимации уравнения фильтрации (1) по пространственным переменным пласт покрывается квадратной сеткой с шагом 40 м (2500 контрольных объемов).

Для исследования устойчивости решения в замеры давления вносились генерируемые случайным образом погрешности ε_i . Результаты решения модельной задачи без погрешности и с погрешностями в замерах давления приведены в табл. 1. Решение k_1 получено без погрешности в замерах давления ($\varepsilon_i=0$ МПа), решения k_2, k_3, k_4

получены в задачах с погрешностями в замерах давления $|\varepsilon_i| < 0,1$ МПа, $|\varepsilon_i| < 0,01$ МПа, $|\varepsilon_i| < 0,001$ МПа, соответственно. При решении задач как с погрешностью, так и без погрешности в замерах давления достигнута заданная точность $\delta=0,01$ МПа. Вычисленные значения проницаемости без погрешности в замерах давления близки к истинным (Рис. 2). Из приведенных результатов решения задач с погрешностями в замерах давления видно, что с уменьшением погрешности значения параметров приближаются к истинным значениям. Отметим, что максимальные относительные отклонения в модельной задаче 1 наблюдаются в узлах интерполяции с максимальными значениями проницаемости. Это объясняется тем, что при одинаковых значениях дебита значение забойного давления на скважине более чувствительно к изменению проницаемости при её малых значениях, что хорошо видно из формулы Писмана. Поэтому для достижения заданной точности по давлению малые значения проницаемости должны быть ближе к истинным по сравнению с большими значениями проницаемости.

Модельная задача 2

В первой модельной задаче истинное и вычисляемое поля проницаемости определялись по одним и тем же узлам интерполяции сплайн-функции. Вторая модельная задача отличается от первой тем, что истинное поле проницаемости строилось по узлам интерполяции, расположенным в узлах квадратной сетки с шагом 1000 м (9 узлов). Координаты узлов интерполяции при решении обратной задачи совпадали с координатами скважин. Истинные и полученные в результате решения второй

№	x, м	y, м	Q ^(*) , м ³ /сут	Проницаемость, мкм ²				
				k_{tr}	k_1	k_2	k_3	k_4
1	300	300	40	0,1	0,100	0,099	0,100	0,100
2	740	140	35	5	4,819	18,809	5,160	4,851
3	1060	140	35	2	2,007	2,805	2,069	2,013
4	1340	340	-100	0,6	0,600	0,581	0,598	0,600
5	1620	180	45	4	3,978	7,966	4,176	3,997
6	620	740	-150	0,75	0,750	0,725	0,747	0,750
7	1020	540	60	0,8	0,801	0,814	0,803	0,801
8	1420	660	50	2,4	2,405	2,665	2,433	2,407
9	1860	740	30	2,8	2,791	4,718	2,908	2,802
10	300	900	60	3	3,004	3,962	3,080	3,012
11	500	1140	70	0,9	0,900	0,943	0,904	0,901
12	940	1060	80	3,4	3,405	4,049	3,463	3,411
13	1220	820	40	1,2	1,201	1,295	1,211	1,202
14	1460	1140	-100	3	2,997	2,719	2,965	2,994
15	1900	1020	40	0,88	0,880	0,986	0,890	0,881
16	340	1460	50	5	5,028	6,993	5,190	5,043
17	740	1540	-100	2,1	2,097	1,920	2,076	2,095
18	1140	1300	60	2,4	2,403	2,636	2,427	2,406
19	1420	1420	80	0,4	0,400	0,407	0,401	0,400
20	1780	1540	-150	2	2,000	1,868	1,985	1,998
21	220	1820	30	5	4,709	23,095	5,056	4,742
22	700	1860	40	1,7	1,705	2,043	1,736	1,708
23	1140	1660	45	0,2	0,200	0,202	0,200	0,200
24	1300	1860	50	0,5	0,500	0,525	0,502	0,500
25	1820	1820	40	0,1	0,100	0,101	0,100	0,100

(*) Q<0 нагнетательные скважины, Q>0 добывающие скважины.

Таблица 1. Значения дебита и проницаемости (истинные и вычисленные) на скважинах (модельная задача 1)

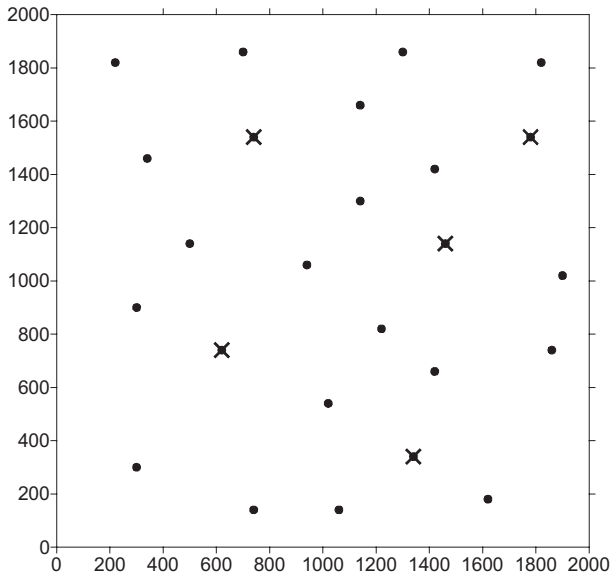


Рис. 1. Добывающие (●) и нагнетательные (×) скважины

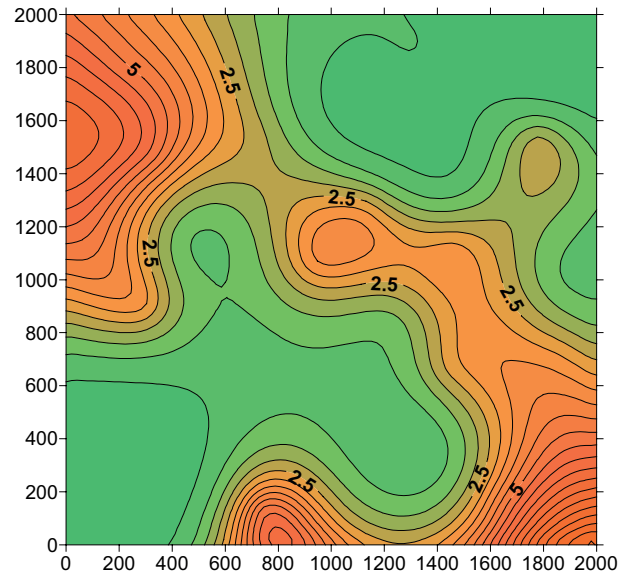


Рис. 2. Вычисленное поле проницаемости (модельная задача 1 без погрешности в замерах давления)

модельной задачи значения проницаемости на скважинах без погрешности в замерах давления приведены в табл. 2.

Соответствующие поля проницаемости показаны на рис. 3, 4. При решении задачи достигнута заданная точность $\delta=0,01$ МПа по замерам давления на скважинах. Вычисленное поле проницаемости близко к истинному полю.

Заключение

Решены модельные задачи идентификации проницаемости двухмерного пласта, вскрытого системой добывающих и нагнетательных скважин, по замерам давления на скважинах в условиях стационарной однофазной фильтрации жидкости. Поле проницаемости аппроксимировалось сплайн-функцией, построенной

№	$k_{тр}$	k	№	$k_{тр}$	k	№	$k_{тр}$	k
1	0,342	0,340	10	0,408	0,408	19	0,415	0,414
2	0,397	0,397	11	0,441	0,441	20	0,381	0,381
3	0,417	0,416	12	0,499	0,498	21	0,313	0,314
4	0,404	0,404	13	0,456	0,454	22	0,368	0,367
5	0,351	0,351	14	0,402	0,402	23	0,421	0,420
6	0,460	0,460	15	0,296	0,296	24	0,413	0,413
7	0,462	0,461	16	0,377	0,377	25	0,422	0,422
8	0,401	0,401	17	0,418	0,419			
9	0,300	0,302	18	0,458	0,457			

Таблица 2. Значения проницаемости (истинные и вычисленные) на скважинах, $\mu\text{км}^2$ (модельная задача 2)

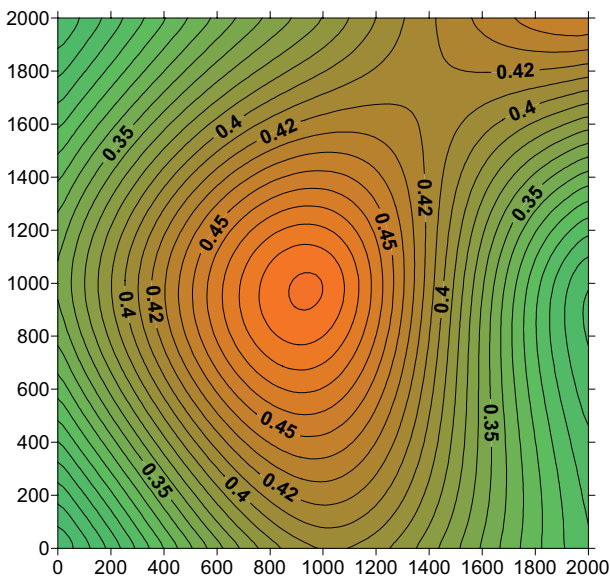


Рис. 3. Истинное поле проницаемости (модельная задача 2)

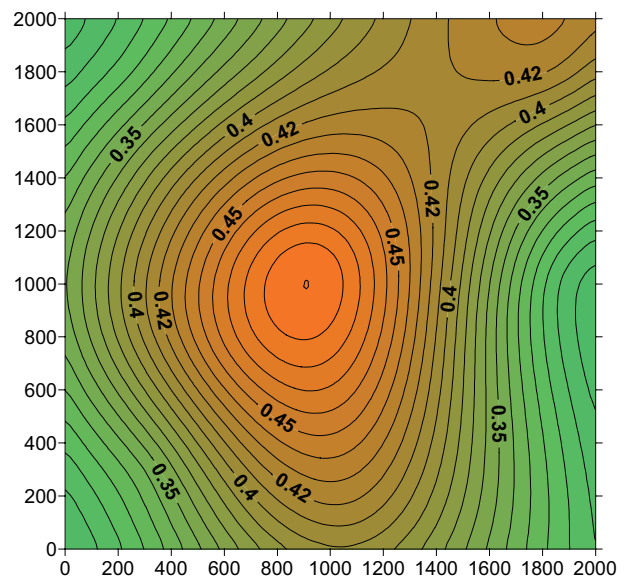


Рис. 4. Вычисленное поле проницаемости (модельная задача 2)

по значениям на скважинах. Неизвестные значения проницаемости на скважинах определялись в процессе минимизации функции невязки с использованием метода Левенберга-Марквардта. При решении модельных задач без погрешностей в замерах давления вычисленные поля проницаемости практически совпадают с заданными полями. Для задачи с погрешностями в замерах давления показана устойчивость полученного решения.

Литература

- Азиз Х., Сеттари Э. (1982). Математическое моделирование пластовых систем. М.: Недра, 407 с.
- Ашкеназы В.О. (2003). Сплайн-поверхности: Основы теории и вычислительные алгоритмы. Тверь: Тверской гос. ун-т, 82 с.
- Басниев К.С., Власов А.М., Кочина И.Н., Максимов В.М. (1986). Подземная гидравлика. М.: Недра, 303 с.
- Голуб Дж., Ван Лоун Ч. (1999). Матричные вычисления. М.: Мир, 548 с.
- Голубев Г.В., Данилаев П.Г., Тумашев Г.Г. (1978). Определение гидропроводности неоднородных нефтяных пластов нелокальными методами. Казань: Изд-во Казанского университета, 168 с.
- Доннис Дж., Шнабель Р. (1988). Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 440 с.
- Зиновьев Н.П. (1984). Идентификация гидропроводности в случае упругого режима фильтрации в нефтяном пласте. *Исслед. по прикл. матем.*, 11, часть 2, с. 78-84.
- Елесин А.В., Кадырова А.Ш., Мазуров П.А. (2009). Двухшаговые методы Левенберга-Марквардта в задаче идентификации коэффициента фильтрации. *Георесурсы*, 32(4), с. 40-42.
- Пантелеев А.В., Летова Т.А. (2005). Методы оптимизации в примерах и задачах: 2-е изд. М.: Высш.шк., 544 с.
- Хайруллин М.Х., Хисамов Р.С., Шамсиев М.Н., Фархуллин Р.Г. (2006). Интерпретация результатов гидродинамических исследований скважин методами регуляризации. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 172 с.
- Хайруллин М.Х., Бадертдинова Е.Р., Назимов Н.А. (2017). Многодатчиковые технологии исследования нефтяных горизонтальных скважин на месторождениях Республики Татарстан. *Георесурсы*, 19(3), Ч. 1, с. 234-238. DOI: <https://doi.org/10.18599/grs.19.3.14>.
- Carrera J., Newman Sh.P. (1986). Estimation of Aquifer Parameters Under Transient and Steady State Conditions: 3. Application to Synthetic and Field Data. *Water Resour. Res.*, 22(2), pp. 228-242.

- Harder R.L., Desmarais R.N. (1972). Interpolation using surface splines. *Journal of Aircraft*, 9(2), pp. 189-191.
- Hill M.C. (1990). Solving groundwater flow problems by conjugate-gradient methods and the strongly implicit procedure. *Water Resour. Res.* 26(9), pp.1961-1969.
- Larabi A., De Smedt F. (1994). Solving three-dimensional hexahedral finite element groundwater models by preconditioned conjugate gradient methods. *Water Resour. Res.*, 30(2), pp.509-521.
- Peaceman D.W. (1978). Interpretation of well block pressures in numerical reservoir simulation. *Soc. Petrol. Eng. Journal*, 18(3), pp. 183-194.
- Sun N.-Z. (1994). *Inverse Problems in Groundwater Modeling*. Kluwer Acad., Norwell, Mass., 337 p.

Сведения об авторах

Андрей Викторович Елесин – канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаборатории математического моделирования гидрогеологических процессов
Институт механики и машиностроения ФИЦ КазНЦ РАН
Россия, 422111, Казань, ул. Лобачевского, 2/31
E-mail: elesin@imm.knc.ru

Альфия Шамильевна Кадырова – канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаборатории математического моделирования гидрогеологических процессов
Институт механики и машиностроения ФИЦ КазНЦ РАН
Россия, 422111, Казань, ул. Лобачевского, 2/31

Анатолий Иванович Никифоров – доктор физ.-мат. наук, главный научный сотрудник лаборатории математического моделирования процессов фильтрации
Институт механики и машиностроения ФИЦ КазНЦ РАН
Россия, 422111, Казань, ул. Лобачевского, 2/31

Статья поступила в редакцию 12.02.2018;
Принята к публикации 24.05.2018;
Опубликована 30.06.2018

IN ENGLISH

Definition of the reservoir permeability field according to pressure measurements on wells with the use of spline function

A.V. Elesin*, A.Sh. Kadyrova, A.I. Nikiforov

Institute of Mechanics and Engineering, FRC Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Kazan, Russian Federation

*Corresponding author: Andrey V. Elesin, e-mail: elesin@imm.knc.ru

Abstract. The problem of reservoir permeability identification based on known well pressures under conditions of single-phase fluid filtration is considered in the article. The permeability field is identified in the spline function class from the solution of the inverse coefficient problem for the filtration equation. The problem of identification is reduced to the problem of minimizing the residual function, having the form of a sum of squares of the difference between the pressure values known from measurements at the wells and obtained with the help of a numerical model. Minimization of the residual function is carried out by the Levenberg-Marquardt method.

The solutions of model problems of permeability

identification for a two-dimensional reservoir, penetrated by a system of production and injection wells, are presented. The calculated permeability fields are close to the true fields. The example of a problem with errors in pressure measurements shows the stability of the solution.

Keywords: permeability identification, spline function, residual function

Recommended citation: Elesin A.V., Kadyrova A.Sh., Nikiforov A.I. (2018). Definition of the reservoir permeability field according to pressure measurements on wells with the use of spline function. *Georesursy = Georesources*, 20(2), pp. 102-107. DOI: <https://doi.org/10.18599/grs.2018.2.102-107>

References

- Ashkenazy V.O. (2003). Splayn-poverhnosti: Osnovy teorii i vychislitel'nye algoritmy [Spline surfaces: Fundamentals of theory and computational algorithms]. Tver: Tverskoy gos. un-t, 82 p. (In Russ.)
- Aziz Kh., Settari A. (1982). Petroleum Reservoir Simulation. Moscow: Nedra, 407 p. (In Russ.)
- Basniev K.S., Vlasov A.M., Kochina I.N., Maksimov V.M. (1986). Podzemnaya gidravlika [Underground hydraulics]. Moscow: Nedra, 303 p. (In Russ.)
- Carrera J., Newman Sh.P. (1986). Estimation of Aquifer Parameters Under Transient and Steady State Conditions: 3. Application to Synthetic and Field Data. *Water Resour. Res.*, 22(2), pp. 228-242.
- Dennis J.E., Schanabel R.B. (1988). Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations. Moscow: Mir., 440 p. (In Russ.)
- Elesin A.V., Kadyrova A.SH., Mazurov P.A. (2009). Dvuhshagovye metody Levenberga-Markvardta v zadache identifikatsii koefitsienta fil'tratsii [Two-step Levenberg-Markvardt methods in the problem of identifying the filtration coefficient]. *Georesursy = Georesources*, 32(4), pp. 40-42. (In Russ.)
- Golub G.H., Van Loan C.F. (1999). Matrix Computations. Moscow: Mir, 548 p. (In Russ.)
- Golubev G.V., Danilaev P.G., Tumashev G.G. (1978). Opredelenie gidroprovodnosti neodnorodnykh neftyanykh plastov nelokal'nymi metodami [Determination of hydroconductivity of inhomogeneous oil reservoirs by nonlocal methods]. Kazan: Kazan Univer. Publ., 168 p. (In Russ.)
- Harder R.L., Desmarais R.N. (1972). Interpolation using surface splines. *Journal of Aircraft*, 9(2), pp. 189-191.
- Hill M.C. (1990). Solving groundwater flow problems by conjugate-gradient methods and the strongly implicit procedure. *Water Resour. Res.* 26(9), pp.1961-1969.
- Khairullin M.Kh., Khisamov R.S., Shamsiev M.N., Farkhullin R.G. (2006). Interpretation of the results of well hydrodynamic research by regularization methods. Moscow-Izhevsk: SRC "Regular and chaotic dynamics"; Institute of Computer Science, 172 p. (In Russ.)
- Khairullin M.Kh., Badertdinova E.R., Nazimov N.A. (2017). Multisensor Research Technologies of Oil Horizontal Wells on Fields of the Republic of Tatarstan. *Georesursy = Georesources*, 19(3), Part 1, pp. 234-238. DOI: <https://doi.org/10.18559/grs.19.3.14>.
- Larabi A., De Smedt F. (1994). Solving three-dimensional hexahedral finite element groundwater models by preconditioned conjugate gradient methods. *Water Resour. Res.* 30(2), pp. 509-521.

Pantelev A.V., Letova T.A. (2005). Metody optimizatsii v primerah i zadachah [Optimization methods in examples and tasks]: 2nd publ. Moscow: Vysshaya shkola, 544 p. (In Russ.)

Peaceman D.W. (1978). Interpretation of well block pressures in numerical reservoir simulation. *Soc. Petrol. Eng. Journal*, 18(3), pp. 183-194.

Sun N.-Z. (1994). Inverse Problems in Groundwater Modeling. Kluwer Acad., Norwell, Mass., 337 p.

Zinoviev N.P. (1984). Identifikatsiya gidroprovodnosti v sluchae uprugogo rezhima fil'tratsii v neftyanom plaste [Identification of the hydraulic conductivity in the case of an elastic filtration regime in oil reservoir]. *Issled. po prikl. matem.* [Studies of applied mathematics], 11, Part 2, pp. 78-84. (In Russ.)

About the Authors

Andrey V. Elesin – PhD (Physics and Mathematics), Senior researcher of the Laboratory of mathematical modeling of hydrogeological processes

Institute of Mechanics and Engineering, FRC Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
2/31, Lobachevsky St., Kazan, 420111, Russian Federation
E-mail: elesin@imm.knc.ru

Alfiya Sh. Kadyrova – PhD (Physics and Mathematics), Senior researcher of the Laboratory of mathematical modeling of hydrogeological processes

Institute of Mechanics and Engineering, FRC Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
2/31, Lobachevsky St., Kazan, 420111, Russian Federation

Anatoly I. Nikiforov – DSc (Physics and Mathematics), Chief researcher of the Laboratory of mathematical modeling of filtration processes

Institute of Mechanics and Engineering, FRC Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
2/31, Lobachevsky St., Kazan, 420111, Russian Federation

*Manuscript received 12 February 2018;
Accepted 24 May 2018; Published 30 June 2018*