

НЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

В цилиндрической системе координат (α, β, γ) строится точное решение задачи теории упругости для кругового цилиндра. На торцах цилиндра $\gamma = \pm 1$ заданы статические или кинематические граничные условия, причем единственным требованием к заданным на торцах функциям является их разложимость в ряды Фурье-Бесселя и Дини. На боковых поверхностях цилиндра краевые условия выполняются на конечном числе линий $\alpha = 1, \gamma = \gamma_i$ и $\alpha = a, \gamma = \gamma_j$, причем на каждой из этих окружностей граничные условия могут быть свои, и выполняются они точно.

К настоящему моменту точные решения построены только для случая осесимметричной деформации цилиндра или для частного вида граничных условий на боковой поверхности, или торцах цилиндра (Shirokova, 2004). Информация о состоянии проблемы имеется в работе (Гурьянов, 1992).

Постановка задачи

Уравнения равновесия цилиндра в перемещениях при отсутствии объемных сил имеют вид (Партон, Перлин, 1981):

$$\begin{aligned} \Delta u - \frac{1}{\alpha^2} \left(u + 2 \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) + \frac{R}{(1-2\nu)} \frac{\partial e}{\partial \alpha} &= 0, \\ \Delta v - \frac{1}{\alpha^2} \left(v - 2 \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + \frac{R}{(1-2\nu)} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial e}{\partial \beta} &= 0, \\ \Delta w + \frac{R}{(1-2\nu)} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial e}{\partial \gamma} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

причем

$$e = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{\alpha} u + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial \gamma} \right). \quad (2)$$

Соотношения закона Гука

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha} &= \frac{E}{(1+\nu)} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right], \\ \sigma_{\beta\beta} &= \frac{E}{(1+\nu)} \left[\frac{1}{R} \left(\frac{u}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right], \\ \sigma_{\gamma\gamma} &= \frac{E}{(1+\nu)} \left[\frac{1}{R\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial \gamma} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right], \\ \sigma_{\alpha\beta} &= \frac{E}{2(1+\nu)R} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{v}{\alpha} \right), \\ \sigma_{\alpha\gamma} &= \frac{E}{2(1+\nu)R} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \gamma} \right), \\ \sigma_{\beta\gamma} &= \frac{E}{2(1+\nu)R} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial \gamma} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь R, r – внешний и внутренний радиусы трубы, $2h$ – высота цилиндра, u, v, w – перемещения точек цилиндра вдоль образующей, направляющей и нормали к поверхности, $\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\beta\beta}, \sigma_{\gamma\gamma}, \sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha\gamma}, \sigma_{\beta\gamma}$ – напряжения в цилиндре, E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона,

$$\begin{aligned} a &= \frac{r}{R}, \quad \varepsilon = \frac{h}{R}, \quad \Delta \equiv \nabla^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2}, \\ \nabla^2 &\equiv \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \end{aligned} \quad (4)$$

Граничные условия:

на торцах заданы перемещения

$$\begin{aligned} w(\alpha, \beta, (-1)^{s-1}) &= f_s(\alpha, \beta), \\ u(\alpha, \beta, (-1)^{s-1}) &= g_s(\alpha, \beta), \\ v(\alpha, \beta, (-1)^{s-1}) &= t_s(\alpha, \beta), \quad (s = 1; 2), \end{aligned} \quad (5)$$

либо напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \beta, (-1)^{s-1}) &= f_s(\alpha, \beta), \\ \sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \beta, (-1)^{s-1}) &= g_s(\alpha, \beta), \\ \sigma_{\beta\gamma}(\alpha, \beta, (-1)^{s-1}) &= t_s(\alpha, \beta), \end{aligned} \quad (6)$$

причем функции f_s, g_s, t_s , как уже говорилось выше, разложимы в ряды Фурье по окружной координате β и в ряды Фурье-Бесселя и Дини по координате α . На линиях боковой поверхности цилиндра могут задаваться как перемещения, так и напряжения. Краевые условия выполняются на каждой линии точно. Число таких линий конечно.

Известно, что объемная деформация удовлетворяет уравнению

$$\Delta e = 0 \quad (7)$$

Решение задачи

Интегрирование системы уравнений (1), (7) по окружной координате осуществляется с помощью рядов

$$\begin{aligned} u(\alpha, \beta, \gamma) &= R \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\alpha, \gamma) \cos(n\beta), \\ w(\alpha, \beta, \gamma) &= R \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\alpha, \gamma) \cos(n\beta), \\ v(\alpha, \beta, \gamma) &= R \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\alpha, \gamma) \sin(n\beta), \\ e(\alpha, \beta, \gamma) &= \sum_{n=0}^{\infty} e_n(\alpha, \gamma) \cos(n\beta), \end{aligned} \quad (8)$$

тогда относительно коэффициентов этих рядов имеем уравнения

$$\Delta_n w_n + \frac{1}{(1-2\nu)\varepsilon} \frac{\partial e_n}{\partial \gamma} = 0, \quad \Delta_n e_n = 0$$

$$\Delta_n u_n - \frac{1}{\alpha^2} (u_n + 2n v_n) + \frac{1}{(1-2\nu)} \frac{\partial e_n}{\partial \alpha} = 0, \quad (9)$$

$$\Delta_n v_n - \frac{1}{\alpha^2} (v_n + 2n u_n) - \frac{1}{(1-2\nu)} \frac{n}{\alpha} e_n = 0.$$

Здесь

$$e_n = \frac{\partial u_n}{\partial \alpha} + \frac{1}{\alpha} u_n + \frac{n}{\alpha} v_n + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w_n}{\partial \gamma}, \quad (10)$$

$$\Delta_n \equiv \nabla_n^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2}, \quad \nabla_n^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{n^2}{\alpha^2}. \quad (11)$$

Начинаем решение со второго уравнения системы (9), затем интегрируются остальные уравнения, после чего выполняется условие (10) и краевые условия.

Решение системы уравнений (9) ищется в виде суммы

$$\Phi_n = \bar{\Phi}_n + \tilde{\Phi}_n, \quad (12)$$

причем под символом Φ_n подразумевается любая компонента напряженно-деформированного состояния (НДС) цилиндра. Каждая группа компонент по отдельности удовлетворяет всем уравнениям системы (9), причем группа компонент «с чертой» отвечает за выполнение краевых условий на торцах цилиндра, компоненты «с волной» участвуют в выполнении условий на боковых поверхностях.

Пусть

$$\bar{e}_n(\alpha, \gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{e}_{kn}(\gamma) J_n(a_{kn}\alpha), \quad (13)$$

где $J_n(z)$ – функция Бесселя, параметр a_{kn} будет определен позднее.

Подставляя выражение (13) во второе уравнение системы (9) и учитывая при этом, что

$$\left[\frac{1}{\alpha} \frac{d}{d\alpha} \left(\alpha \frac{d}{d\alpha} \right) - \frac{n^2}{\alpha^2} + a_{kn}^2 \right] J_n(a_{kn}\alpha) = 0, \quad (14)$$

относительно коэффициента ряда получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{d^2}{d\gamma^2} - b_{kn}^2 \right) \bar{e}_{kn} = 0, \quad b_{kn} = \varepsilon a_{kn} \quad (15)$$

Очевидно,

$$\bar{e}_{kn} = D_{1kn} ch(b_{kn}\gamma) + D_{2kn} sh(b_{kn}\gamma), \quad (16)$$

где D_{1kn}, D_{2kn} – постоянные интегрирования.

Если принять

$$\bar{w}_n(\alpha, \gamma) = \frac{\varepsilon}{(1-2\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{w}_{kn}(\gamma) J_n(a_{kn}\alpha), \quad (17)$$

то решение первого уравнения системы (9) имеет вид

$$\bar{w}_{kn} = -\frac{1}{2} \{ D_{3kn} ch(b_{kn}\gamma) + D_{4kn} sh(b_{kn}\gamma) + \gamma [D_{1kn} ch(b_{kn}\gamma) + D_{2kn} sh(b_{kn}\gamma)] \}. \quad (18)$$

Вычислим сумму и разность оставшихся двух уравнений системы (9), тогда

$$\left[\frac{d^2}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{d}{d\alpha} - \frac{(n \pm 1)^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \right] (\bar{u}_n \pm \bar{v}_n) + \frac{1}{(1-2\nu)} \left(\frac{\partial \bar{e}_n}{\partial \alpha} \mp \frac{n}{\alpha} \bar{e}_n \right) = 0$$

или

$$\Delta_{n \pm 1} (\bar{u}_n \pm \bar{v}_n) + \frac{1}{(1-2\nu)} \left(\frac{\partial \bar{e}_n}{\partial \alpha} \mp \frac{n}{\alpha} \bar{e}_n \right) = 0. \quad (19)$$

С учетом выражения (13) и формул

$$\left(\frac{d}{d\alpha} - \frac{n}{\alpha} \right) J_n(a_{kn}\alpha) = -a_{kn} J_{n+1}(a_{kn}\alpha),$$

$$\left(\frac{d}{d\alpha} + \frac{n}{\alpha} \right) J_n(a_{kn}\alpha) = a_{kn} J_{n-1}(a_{kn}\alpha), \quad (20)$$

можем считать

$$\bar{u}_n(\alpha, \gamma) + \bar{v}_n(\alpha, \gamma) = \frac{\varepsilon}{(1-2\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{G}_{kn}(\gamma) J_{n+1}(a_{kn}\alpha). \quad (21)$$

$$\bar{u}_n(\alpha, \gamma) - \bar{v}_n(\alpha, \gamma) = \frac{\varepsilon}{(1-2\nu)} \left[\bar{Q}_{0n}(\alpha, \gamma) + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{Q}_{kn}(\gamma) J_{n-1}(a_{kn}\alpha) \right],$$

откуда следует, что

$$\bar{Q}_{0n}(\alpha, \gamma) = 2n(\xi_n + \eta_n \gamma) \alpha^{n-1}. \quad (22)$$

$$\bar{G}_{kn} = \frac{1}{2} \{ D_{5kn} ch(b_{kn}\gamma) + D_{6kn} sh(b_{kn}\gamma) + \gamma [D_{1kn} sh(b_{kn}\gamma) + D_{2kn} ch(b_{kn}\gamma)] \}$$

$$\bar{Q}_{kn} = \frac{1}{2} \{ D_{7kn} ch(b_{kn}\gamma) + D_{8kn} sh(b_{kn}\gamma) - \gamma [D_{1kn} sh(b_{kn}\gamma) + D_{2kn} ch(b_{kn}\gamma)] \}.$$

Теперь

$$\bar{u}_n = \frac{\varepsilon}{2(1-2\nu)} \left\{ \bar{Q}_{0n} + \sum_{k=1}^{\infty} [\bar{G}_{kn} J_{n+1}(a_{kn}\alpha) + \bar{Q}_{kn} J_{n-1}(a_{kn}\alpha)] \right\},$$

$$\bar{v}_n = \frac{\varepsilon}{2(1-2\nu)} \left\{ -\bar{Q}_{0n} + \sum_{k=1}^{\infty} [\bar{G}_{kn} J_{n+1}(a_{kn}\alpha) - \bar{Q}_{kn} J_{n-1}(a_{kn}\alpha)] \right\}. \quad (23)$$

После удовлетворения условию (10) получаем

$$D_{7kn} = D_{5kn} - 2 D_{4kn} - \frac{2(3-4\nu)}{b_{kn}} D_{1kn},$$

$$D_{8kn} = D_{6kn} - 2 D_{3kn} - \frac{2(3-4\nu)}{b_{kn}} D_{2kn}. \quad (24)$$

Выполним граничные условия на торцах. Пусть

$$f_s(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{sn}(\alpha) \cos(n\beta),$$

$$g_s(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{sn}(\alpha) \cos(n\beta), \quad t_s(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} t_{sn}(\alpha) \sin(n\beta).$$

Представим функцию f_{sn} в виде ряда Фурье-Бесселя

$$f_{sn}(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{skn} J_n(a_{kn}\alpha) \quad (25)$$

причем a_{kn} – k -й положительный корень функции Бесселя $J_n(z)$, а

$$f_{skn} = \frac{2}{J_{n+1}^2(a_{kn})} \int_a^1 \alpha f_{sn}(\alpha) J_n(a_{kn}\alpha) d\alpha. \quad (26)$$

Пусть

$$g_{sn}(\alpha) + t_{sn}(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} l_{skn} J_{n+1}(a_{kn}\alpha), \quad (27)$$

является рядом Дини, тогда a_{kn} – корень уравнения

$$z \frac{dJ_{n+1}(z)}{dz} + H J_{n+1}(z) = 0, \quad (28)$$

где H – любое число кроме $H = -(n+1)$, а

$$l_{skn} = \frac{2a_{kn}^2 \int_a^1 [g_{sn}(\alpha) + t_{sn}(\alpha)] J_{n+1}(a_{kn}\alpha) d\alpha}{a_{kn}^2 [J'_{n+1}(a_{kn})]^2 + [a_{kn}^2 - (n+1)^2] J_{n+1}^2(a_{kn})}.$$

Если принять $H = (n+1)$, то в силу формулы

$$z \frac{dJ_{n+1}(z)}{dz} + (n+1) J_{n+1}(z) = z J_n(z) \quad (29)$$

уравнение (28) принимает вид $J_n(z) = 0$, то есть параметр a_{kn} разложения в ряд Дини (27) тот же, что и для ряда (25). Кроме того, коэффициент ряда Дини сильно упрощается, поскольку

$$a_{kn} J'_{n+1}(a_{kn}) = -(n+1) J_{n+1}(a_{kn}),$$

что следует из формулы (28). Итак,

$$l_{skn} = \frac{2}{J_{n+1}^2(a_{kn})} \int_0^1 [g_{sn}(\alpha) + t_{sn}(\alpha)] J_{n+1}(a_{kn}\alpha) d\alpha. \quad (30)$$

Несколько сложнее обстоит дело с разложением в ряд Дини функции $f_{sn} - g_{sn}$. Как уже говорилось выше, эту функцию необходимо разлагать в ряд по функциям $J_{n-1}(a_{kn}\alpha)$, но в силу формулы

$$z \frac{dJ_{n-1}(z)}{dz} - (n-1) J_{n-1}(z) = -z J_n(z) \quad (31)$$

параметр разложения a_{kn} будет корнем функции Бесселя $J_n(z)$ только при $H = -(n+1)$, когда в разложении Дини должен появиться нулевой член, то есть

$$g_{sn}(\alpha) - t_{sn}(\alpha) = p_{s0n} \alpha^{n-1} + \sum_{k=1}^{\infty} p_{skn} J_{n-1}(a_{kn}\alpha), \quad (32)$$

здесь

$$p_{s0n} = 2n \int_a^1 \alpha^n [g_{sn}(\alpha) - t_{sn}(\alpha)] d\alpha, \quad (33)$$

$$p_{skn} = \frac{2}{J_{n-1}^2(a_{kn})} \int_a^1 [g_{sn}(\alpha) - t_{sn}(\alpha)] J_{n-1}(a_{kn}\alpha) d\alpha.$$

Отсюда становится ясным необходимость нулевого члена во второй формуле (21). Из краевых условий (5), получаем восемь уравнений

$$\begin{aligned} \bar{w}_{kn}((-1)^{s-1}) &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{R} f_{skn}, \\ \bar{G}_{kn}((-1)^{s-1}) &= \frac{2(1+\nu)(1-2\nu)}{R} l_{skn}, \\ \bar{Q}_{kn}((-1)^{s-1}) &= \frac{2(1+\nu)(1-2\nu)}{R} p_{skn}, \\ n[\xi_n + (-1)^{s-1} \eta_n] &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{R} p_{s0n} \end{aligned} \quad (34)$$

относительно постоянных $D_{1kn} - D_{6kn}$ и ξ_n, η_n .

Итак, уравнения решены, граничные условия (5) на торцах выполнены.

Поскольку напряжения $\sigma_{\alpha\gamma} \pm \sigma_{\beta\gamma}, \sigma_{\gamma\gamma}$ представимы в виде рядов, аналогичных рядам для $u \pm v, w$, что следует из соот-

ношений (3), выполнение альтернативных краевых условий (6) принципиальных трудностей не представляет.

Ищем второе решение исходной задачи, ответственное за выполнение граничных условий на боковой поверхности цилиндра в виде конечной суммы

$$\tilde{e}_n(\alpha, \gamma) = \sum_{m=1}^M \tilde{e}_{mn}(\gamma) I_n(\lambda_{mn}\alpha), \quad (35)$$

здесь $I_n(z)$ – модифицированная функция Бесселя, от числа M зависит, на скольких линиях боковой поверхности выполняются краевые условия, но, как будет показано ниже, не зависит точность решения, значение параметра λ_{mn} будет определено в ходе решения.

Подставляем соотношение (35) во второе уравнение системы (9), и учитываем при этом уравнение

$$\left[\frac{1}{\alpha} \frac{d}{d\alpha} \left(\alpha \frac{d}{d\alpha} \right) - \frac{n^2}{\alpha^2} - \lambda_{mn}^2 \right] I_n(\lambda_{mn}\alpha) = 0. \quad (36)$$

В результате получаем

$$\left(\frac{d^2}{d\gamma^2} + \omega_{mn}^2 \right) \tilde{e}_{mn} = 0, \quad \omega_{mn} = \varepsilon \lambda_{mn}, \quad (37)$$

откуда следует

$$\tilde{e}_{mn} = C_{1mn} \cos(\omega_{mn}\gamma) + C_{2mn} \sin(\omega_{mn}\gamma). \quad (38)$$

Определим теперь прогиб, задав его в виде

$$\tilde{w}_n(\alpha, \gamma) = \frac{\varepsilon}{(1-2\nu)} \sum_{m=1}^M \tilde{w}_{mn}(\gamma) I_n(\lambda_{mn}\alpha), \quad (39)$$

тогда

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{mn} = & -\frac{1}{2} \{ C_{3mn} \cos(\omega_{mn}\gamma) + C_{4mn} \sin(\omega_{mn}\gamma) + \\ & + \gamma [C_{1mn} \cos(\omega_{mn}\gamma) + C_{2mn} \sin(\omega_{mn}\gamma)] \}. \end{aligned} \quad (40)$$

Проделив ту же процедуру с третьим и четвертым уравнениями системы (9), что делали ранее, получаем

$$\Delta_{n\pm 1} (\tilde{u}_n \pm \tilde{v}_n) + \frac{1}{(1-2\nu)} \left(\frac{\partial \tilde{e}_n}{\partial \alpha} \mp \frac{n}{\alpha} \tilde{e}_n \right) = 0. \quad (41)$$

Если принять

$$\tilde{u}_n \pm \tilde{v}_n = \frac{\varepsilon}{(1-2\nu)} \sum_{m=1}^M A_{mn}^{\pm}(\gamma) I_{n\pm 1}(\lambda_{mn}\alpha), \quad (42)$$

нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} A_{mn}^+ &= \frac{1}{2} \{ C_{5mn} \cos(\omega_{mn}\gamma) + C_{6mn} \sin(\omega_{mn}\gamma) + \\ & + \gamma [C_{2mn} \cos(\omega_{mn}\gamma) - C_{1mn} \sin(\omega_{mn}\gamma)] \}, \\ A_{mn}^- &= \frac{1}{2} \{ C_{7mn} \cos(\omega_{mn}\gamma) + C_{8mn} \sin(\omega_{mn}\gamma) + \\ & + \gamma [C_{2mn} \cos(\omega_{mn}\gamma) - C_{1mn} \sin(\omega_{mn}\gamma)] \}. \end{aligned} \quad (43)$$

Теперь

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n &= \frac{\varepsilon}{2(1-2\nu)} \sum_{m=1}^M [A_{mn}^+(\gamma) I_{n+1}(\lambda_{mn}\alpha) + A_{mn}^-(\gamma) I_{n-1}(\lambda_{mn}\alpha)], \\ \tilde{v}_n &= \frac{\varepsilon}{2(1-2\nu)} \sum_{m=1}^M [A_{mn}^+(\gamma) I_{n+1}(\lambda_{mn}\alpha) - A_{mn}^-(\gamma) I_{n-1}(\lambda_{mn}\alpha)]. \end{aligned} \quad (44)$$

Подставим полученные для функций $\tilde{e}_n, \tilde{u}_n, \tilde{v}_n, \tilde{w}_n$ соотношения в уравнение (10), что позволит определить связь между постоянными интегрирования $C_{1kn} - C_{8kn}$. Соотношение (10) выполняется при

$$C_{7mn} = \frac{2(3-4\nu)}{\omega_{mn}} C_{1mn} + 2C_{4mn} - C_{5mn},$$

$$C_{8mn} = \frac{2(3-4\nu)}{\omega_{mn}} C_{2mn} - 2C_{3mn} - C_{6mn}. \quad (45)$$

Поскольку на торцах цилиндра краевые условия уже выполнены, потребуем, чтобы только что полученные перемещения при $\gamma = \pm 1$ были нулевыми. В результате приходим к однородной системе алгебраических уравнений, которая имеет нетривиальное решение, если параметры λ_{mn}^* определяются из уравнений

$$(3-4\nu)\sin(2\omega_{mn}) \pm 2\omega_{mn} = 0, \quad (\omega_{mn} = \varepsilon \lambda_{mn}^*).$$

Если ω_{mn}^* – корень уравнения

$$(3-4\nu)\sin(2\omega_{mn}^*) - 2\omega_{mn}^* = 0,$$

то $C_{1mn} \neq 0, C_{2mn} = 0, \lambda_{mn}^* = \omega_{mn}^* / \varepsilon$.

Когда ω_{mn}^{**} – корень уравнения

$$(3-4\nu)\sin(2\omega_{mn}^{**}) + 2\omega_{mn}^{**} = 0,$$

имеем $C_{1mn} = 0, C_{2mn} \neq 0, \lambda_{mn}^{**} = \omega_{mn}^{**} / \varepsilon$.

При этом

$$C_{3mn} = -C_{2mn} \operatorname{tg}(\omega_{mn}^*),$$

$$C_{4mn} = -C_{1mn} \operatorname{ctg}(\omega_{mn}^*),$$

$$C_{7mn} = C_{5mn} = C_{1mn} \operatorname{tg} \omega_{mn}^*,$$

$$C_{8mn} = C_{6mn} = -C_{2mn} \operatorname{ctg} \omega_{mn}^*. \quad (46)$$

В итоге

$$\tilde{e}_n(\alpha, \gamma) = \sum_{m=1}^M [C_{1mn} \cos(\omega_{mn}^* \gamma) I_n(\lambda_{mn}^* \alpha) + C_{2mn} \sin(\omega_{mn}^{**} \gamma) I_n(\lambda_{mn}^{**} \alpha)], \quad (47)$$

$$\tilde{w}_n(\alpha, \gamma) = -\frac{\varepsilon}{2(1-2\nu)} \sum_{m=1}^M \{ C_{1mn} [\gamma \cos(\omega_{mn}^* \gamma) - \operatorname{ctg} \omega_{mn}^* \sin(\omega_{mn}^* \gamma)] I_n(\lambda_{mn}^* \alpha) + C_{2mn} [\gamma \sin(\omega_{mn}^{**} \gamma) - \operatorname{tg} \omega_{mn}^{**} \cos(\omega_{mn}^{**} \gamma)] I_n(\lambda_{mn}^{**} \alpha) \},$$

$$\tilde{u}_n = \frac{\varepsilon}{4(1-2\nu)} \sum_{m=1}^M \{ C_{1mn} [\operatorname{tg} \omega_{mn}^* \cos(\omega_{mn}^* \gamma) - \gamma \sin(\omega_{mn}^* \gamma)] [I_{n+1}(\lambda_{mn}^* \alpha) + I_{n-1}(\lambda_{mn}^* \alpha)] - C_{2mn} [\operatorname{ctg} \omega_{mn}^{**} \sin(\omega_{mn}^{**} \gamma) - \gamma \cos(\omega_{mn}^{**} \gamma)] \times [I_{n+1}(\lambda_{mn}^{**} \alpha) + I_{n-1}(\lambda_{mn}^{**} \alpha)] \},$$

$$\tilde{v}_n = \frac{\varepsilon}{4(1-2\nu)} \sum_{m=1}^M \{ C_{1mn} [\operatorname{tg} \omega_{mn}^* \cos(\omega_{mn}^* \gamma) - \gamma \sin(\omega_{mn}^* \gamma)] [I_{n+1}(\lambda_{mn}^* \alpha) - I_{n-1}(\lambda_{mn}^* \alpha)] - C_{2mn} [\operatorname{ctg} \omega_{mn}^{**} \sin(\omega_{mn}^{**} \gamma) - \gamma \cos(\omega_{mn}^{**} \gamma)] \times [I_{n+1}(\lambda_{mn}^{**} \alpha) - I_{n-1}(\lambda_{mn}^{**} \alpha)] \}.$$

Напряжения определяются из соотношений закона Гука (3) дифференцированием.

Значения постоянных интегрирования C_{1mn}, C_{2mn} определяются из краевых условий на боковых поверхностях цилиндра, причем при выполнении этих условий необходимо учитывать первое решение. Таким образом, гранич-

ные условия на торцах выполняются тем точнее, чем больше удерживается членов рядов по k . Краевые условия на линиях боковых поверхностей выполняются точно при любом количестве членов во втором решении, само же число M определяет лишь число этих линий на поверхностях $\alpha = 1$ и $\alpha = a$.

В качестве примера рассматривалась осесимметричная деформация сплошного цилиндра при $\varepsilon = 1$, причем на его торцах выполняются статические условия

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, 1) = J_0(a_{10} \alpha), \quad \sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, -1) = 0, \quad \sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \pm 1) = 0, \\ u(1, \gamma) = w(1, \gamma) = 0.$$

Коэффициент Пуассона материала $\nu = 0.3$. Оба перемещения равнялись нулю на линиях: $\gamma = 0, 0.1, \pm 0.2, \pm 1$ боковой поверхности цилиндра, затем к этим линиям добавлялись еще четыре $\gamma = \pm 0.4, \pm 0.6$.

Было интересно установить, какова погрешность выполнения граничных условий в промежуточных точках, не лежащих на этих линиях. В случае 6 линий значения обоих перемещений не превышали 0.002 по сравнению с единицей. При увеличении числа линий до 10 погрешность выполнения граничных условий практически сводится к нулю, но появляется необходимость нормирования коэффициентов алгебраической системы относительно постоянных интегрирования.

Было проведено исследование возможности использования в расчетах только первого из двух решений. Оно позволяет выполнить точно все краевые условия на торцах цилиндра и одно из условий на его боковой поверхности. Из рассмотренного примера видно, что как для перемещений, так и для напряжений в этом случае получается качественно отличающийся от точного результат.

Литература

Гурьянов Н.Г. Об одном варианте решения задачи теории упругости для цилиндра. *Известия ВУЗов «Математика»*, № 11. 1992. 12-16.

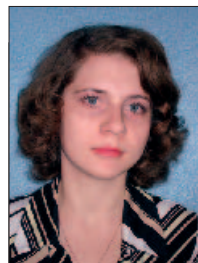
Партон В.З., Перлин П.И. *Методы математической теории упругости*. М.: Наука, 1981.

Shirokova E.A. On 3-d analog of the second basic problem of the theory of elasticity for a cylindrical solid. *Mech. Res. Com.*, v. 31, №1, 2004, 29-37.



**Николай Георгиевич
Гурьянов**

доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой общей математики, заслуженный работник ВШ РФ. Область научных интересов – теория упругости, механика пластин и оболочек.



**Ольга Николаевна
Тюленева**

кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры общей математики. Область научных интересов – механика пластин и оболочек.