

М. Г. Храмченков¹, Р. Х. Храмченкова²

¹НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева, г.Казань

²Академия Наук Республики Татарстан, г.Казань
Maxim.Khranchenkov@ksu.ru

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ГИДРОФИЗИКИ НАБУХАЮЩИХ ПОЧВ

Рассматривается математическая модель гидрофизики набухающих почв. Основой модели послужило обобщение теории фильтрационной консолидации на случай, когда масса твердой фазы пористого скелета изменяется за счет перетока флюида в ходе процессов набухания/усадки под действием осмотического давления. Поставлена и решена задача о набухании/усадке слоя почвы. На основе анализа решения исследованы особенности модели, важные для объяснения некоторых характерных черт процессов в набухающих почвах. Показано, что полученные решения, реализованные на примере процесса усадки набухающих почв, находятся в хорошем согласии с результатами экспериментов.

Введение

Набухающие системы традиционно являются объектом пристального внимания и исследования физико-химической механики, биомеханики и биофизики, физики полимеров, гидрогеологии и ряда других дисциплин. Примерами набухающих систем в природе являются почвы, глинистые горные породы, некоторые полимеры, а также некоторые полимолекулярные системы живых организмов. Обычно механика таких систем строится на основе эмпирических реологических моделей, мало что говорящих о физической природе набухания в таких системах. Существует настоятельная необходимость объединения чисто механических представлений о процессах в набухающих системах с физико-химическими свойствами таких систем, общими как для неорганических, так и для органических объектов. На наш взгляд, таким свойством может быть осмотическое давление в набухающих системах, являющееся «движущей силой» процесса набухания. Осмотическое давление является причиной перетока флюида в (из) твердую матрицу и появлению дополнительных напряжений, останавливающих, в конечном счете, процесс набухания. Поэтому набухающую матрицу можно рассматривать как пористую среду с набухающим скелетом. В качестве модели, описывающей механику таких систем, можно выбрать хорошо исследованную модель фильтрационной консолидации (Храмченков, 2003), однако последнюю необходимо обобщить на случай пористого скелета переменной массы. Термодинамика набухания изложена в целом ряде прекрасных монографий, из которых мы будем пользоваться (Гугенгейм, 1941).

Физико-химическая механика набухающих почв. Введем следующие необходимые обозначения: c_0 – теплоемкость почвы; $c_v^{(s)}$ – теплоемкость твердой фазы почвы; $c_v^{(w)}$ – теплоемкость почвенной влаги; C – концентрация электролита в транспортных порах; C_I – концентрация катионов в растворе; C_2 – концентрация анионов в растворе; D – коэффициент диффузии; G_{ij} – тензор внешней нагрузки; e – обменная емкость глины; E – влажность воздуха; j – обменный поток между скелетом и транспортными порами; $J_e^{(c)}$ – поток влаги, испаряющейся из капилляра; k – проницаемость среды; k_0 – теплопроводность почвы; K – упругая постоянная; z_0 – толщина слоя глины; M_s – масса твердой фазы; m – свободная (транспортная) пористость; \mathbf{q} – скорость фильтрации; q – модуль \mathbf{q} ; p – давление в жидкой

фазе; Q – поток тепла в почве; R – универсальная газовая постоянная; T – температура; t – время; V_0 – представительный объем; V_s – объем твердой фазы; V_f – скорость флюида в транспортных порах; \mathbf{V}_s – скорость твердой фазы; x_p, x_j – координатные оси; z – вертикальная ось; α – константа массообмена; Γ – внешняя нагрузка; η – вязкость воды; m_i – химический потенциал иона в растворе (индекс 1 относится к катиону, 2 – к аниону); π – осмотическое давление; θ – усадка; $\dot{\theta}$ – скорость усадки; ρ_f – плотность флюида; ρ_s – плотность твердой фазы; ρ_0 – плотность почвы; $\rho_1^{(w)}$ – плотность пара над мениском капиллярной влаги; $\rho_2^{(w)}$ – плотность пара у выхода из капилляра; σ – постоянная Стефана; σ_{ij}^f – тензор эффективных напряжений; σ^f – след тензора эффективных напряжений; σ_{ij}^s – тензор истинных напряжений скелета; σ^s – след тензора истинных напряжений скелета. Индексы обозначают: e – означает внешнюю часть (от английского external – внешний); f – принадлежность к жидкой фазе (от англ. fluid – жидкость); 0 – начальное состояние; s – принадлежность к твердой фазе, или пористому скелету (от англ. solid – твердый); индексы $f, s, e, 0$ имеют один и тот же смысл как в верхнем, так и в нижнем положении; индексы i, j без скобок означают проекции на оси координат; индекс (i) – относится к работе внутренних (internal – внутренний) поверхностных сил; точка над буквой обозначает частную производную по времени; чертой сверху помечается принадлежность параметров к поровому раствору, т. е. раствору в составе скелета среды.

Запишем теперь основные уравнения механики для таких систем. Начнем с уравнения баланса массы. Для массы жидкой фазы имеем:

$$\frac{\partial m s \rho_f}{\partial t} + \operatorname{div}(m \rho_f s \mathbf{V}_f) + j = 0, \rho_f = \text{const}. \quad (1)$$

Для массы связанной воды имеем соответственно

$$\frac{\partial m_c \rho_f}{\partial t} + \operatorname{div}[m_c \rho_f \mathbf{V}_c] - j = 0. \quad (2)$$

Масса твердой фазы есть соответственно

$$\frac{\partial [(1-m-m_c)\rho_s]}{\partial t} + \operatorname{div}[\rho_s(1-m-m_c)\mathbf{V}_s] = 0. \quad (3)$$

Полагая плотности воды и твердого скелета постоянными и складывая уравнения (1) – (3), получим

$$-\partial[m(1-s)]/\partial t + \operatorname{div}[\bar{V}_s[1-m(1-s)]] + \operatorname{div}[m s (\mathbf{V}_f - \mathbf{V}_s)] - \operatorname{div}[m_c (\mathbf{V}_c - \mathbf{V}_s)] = 0. \quad (4)$$

Обозначая $\mathbf{q} = m(\mathbf{V}_f - \mathbf{V}_s)$, и из условия $\mathbf{V}_c = \mathbf{V}_s$ имеем

$$-\partial[m(1-s)]/\partial t + [1-m(1-s)]\partial\theta/\partial t + \text{div}\mathbf{q} = 0. \quad (5)$$

Поясним вид уравнения (5). Оно немедленно следует из определения усадки $dV_0/V_0 = d\theta$ и $\text{div}\mathbf{V}_s = \partial\theta/\partial t$. Для $s = 1$ уравнение (5) легко преобразуется к виду:

$$\text{div}\mathbf{q} + \dot{\theta} = 0. \quad (6)$$

Очевидно, что $\rho_0 = (1-m)\rho_s$. Тогда, полагая, что влажность деформирующейся почвы регулируется главным образом испарением, получим из (6)

$$\rho_s = \{1 - [1 - [1 - m_0(1-s)]\exp(-\theta)]/(1-s)\}\rho_0. \quad (7)$$

Определим запас доступной растениям влаги как $\omega = ms$. Тогда для него имеем из (7):

$$\omega = s\{1 - [1 - m_0(1-s)]\exp(G/K)\}/(1-s). \quad (8)$$

Перейдем теперь к уравнению баланса количества движения. Запишем его в форме уравнения равновесия:

$$G_{ij} = (1-m)\sigma_{ij}^s - msp\delta_{ij} = (1-m)(\sigma_{ij}^s + p\delta_{ij}) - p[1-m(1-s)]\delta_{ij},$$

которое после введения обозначения

$$(1-m)(\sigma_{ij}^s + p\delta_{ij}) = \sigma_{ij}^f$$

примет традиционный для теории фильтрационной консолидации вид

$$G_{ij} = \sigma_{ij}^f - p[1-m(1-s)]\delta_{ij}. \quad (9)$$

Обратимся теперь к уравнению энергообмена почвы и атмосферы. Запишем излучение поверхности почвы и поток тепла к поверхности почвы в виде

$$\left. \begin{aligned} R_N &= \sigma T^4(1-a-b\sqrt{E}), \quad a, b - \text{const} \\ Q &= k_0\rho_0c_0(\partial T/\partial z)|_{z=0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_N = Q \quad (10)$$

В соответствии с (Хргян, 1969) запишем

$$T = T_1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{R_N}{\rho_0 c_0 \sqrt{k_0}} \sqrt{t}. \quad (11)$$

Известно, что почвы участвуют в важнейшем для атмосферной динамики процессе теплообмена между земной поверхностью и атмосферой, принимая солнечную радиацию в дневное время и отдавая радиацию ночью. Кроме того, для агрономии, гидротехнических расчетов и для суммарных оценок теплового (радиационного) баланса суши нужно знать величину испарения с поверхности почвы. Поведение влаги в порах почвы достаточно сложно. Если испарение регулируется плотностью пара над мениском капиллярной воды и у выхода из почвенного капилляра, то в соответствии с (Хргян, 1969) имеем для скорости испарения:

$$J_e^{(c)} = \pi r^2 D(\rho_1^{(w)} - \rho_2^{(w)})/L. \quad (12)$$

Здесь, напомним, $J_e^{(c)}$ есть поток испаряющейся влаги из капилляра, r – радиус капилляра, L – длина капилляра, D – коэффициент диффузии, $\rho_1^{(w)}$, $\rho_2^{(w)}$ – плотности пара над мениском капиллярной воды и у выхода из почвенного капилляра соответственно. Однако в соответствии с данными опыта, истинное испарение почвы в разы (4 – 5) больше, чем это предсказывается по формуле (12). Очевидно, что в общий поток влаги из почвы необходимо включать поток влаги, которая входит в состав «твердой фазы», т.е. осмотической влаги почвы. Условие равновесия капиллярной и осмотической влаги запишем в виде

$$\pi(m, \theta) = p_c, \quad (13)$$

где p_c есть капиллярное давление влаги, определяемое по формуле Аверьянова:

$$p_c = (p_0 s_0 / s)(1-s)/(1-s_0), \quad s \geq s_0. \quad (14)$$

Используя результаты следующего раздела, можно легко показать, что для незагрязненной почвенной влаги имеем

$$\pi(m, \theta) = RTe/[(1-m)V_0 - V_s]. \quad (15)$$

Здесь $V_0 = V_0^{(0)} \exp(\theta)$ есть элемент объема почвы, V_s есть объем твердых минеральных частиц почвы. Из полученных соотношений следует, что

$$m = 1 - \alpha - \beta s, \quad \alpha = V_s/V_0, \quad \beta = RTe(1-s_0^3)/(p_0 s_0 V_0). \quad (16)$$

Поскольку соотношение для теплоемкости почвы имеет вид

$$c_0 = (1-m)c_v^{(s)} + msc_v^{(w)}, \quad (17)$$

то коэффициент теплоусвоения (Хргян, 1969) будет, таким образом, нелинейной функцией водонасыщенности, причем вид его будет существенно различаться для разных типов почв. Известно, что этот коэффициент характеризует, в том числе, запаздывание максимума температуры почвы по отношению к максимуму инсоляции. Кроме того, амплитуда температурных колебаний поверхности почвы растет с уменьшением этого коэффициента. Нами получены формулы, позволяющие предсказать значения коэффициента теплоусвоения для различных условий, включая такие процессы, как разрушение структуры почв, изменение гидрологического режима почв, изменение климатических характеристик района и т.д. Таким образом, можно разработать модели взаимовлияния параметров микроклимата и характеристик данного типа почв.

Динамика набухания. Рассмотрим теперь процесс набухания подробнее. В рассуждениях будем опираться на концепцию осмотической ячейки, развитую одним из авторов в (Храмченков, 2003), в соответствии с которой в равновесных условиях осмотическое давление находится из равенства химических потенциалов ионов раствора внутри твердого скелета и раствора в транспортных порах:

$$\mu_i = \bar{\mu}_i, \quad i = 1, 2 \quad (18)$$

Выбирая в качестве примера для расчета 1–1 – электролит и используя стандартное представление для вида химического потенциала, получим

$$\mu_i = \mu_i^0(p, T) + RT \ln C_i + ez_i \Phi, \quad z_i = \pm 1 : \quad C_1 C_2 = C^2 = \bar{C}_1 \bar{C}_2 \quad (19)$$

Последнее уравнение в (19) представляет собой условие доннановского равновесия (Гугенгейм, 1941). Однако система уравнений (19) не замкнута. Используем для ее замыкания условие электронейтральности системы «твердая фаза скелета – поровый раствор»:

$$(\bar{C}_1 - \bar{C}_2)[(1-m)V_0 - V_s] = e, \quad e' = e/[(1-m)V_0 - V_s] \quad (20)$$

Решение уравнений (19) с учетом (20) есть

$$\bar{C}_1 = \frac{e'}{2} + \sqrt{\frac{e'^2}{4} + C^2}, \quad \bar{C}_2 = -\frac{e'}{2} + \sqrt{\frac{e'^2}{4} + C^2}. \quad (21)$$

Тогда из (21) имеем для осмотического давления

$$\pi = \frac{RT}{2} \left(\sqrt{e'^2 + 4C^2} - 2C \right). \quad (22)$$

При $C=0$ имеем из (22)

$$\pi = \frac{1}{2} RTe' = \frac{1/2 \cdot RTe}{(1-m)V_0 - V_s} \quad (23)$$

На частицы скелета действуют две силы – осмотическое давление в поровом растворе и эффективное напряжение, препятствующее набуханию. Очевидно, что разность этих двух сил есть результирующая сила, ведущая либо к набуханию, либо к усадке. Таким образом, рационально записать уравнение набухания в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} [V_s(\rho_s - \rho_w) + (1-m)\rho_w V_0] = \alpha [(1-m)\pi - \sigma^f] \quad (24)$$

Уравнение (24) описывает динамику изменения массы скелета за счет притока (выдавливания) воды в ходе набухания (усадки). Уравнения (23) и (24) замыкают общую систему уравнений механики процесса набухания (усадки).

Математическая модель усадки набухающих почв. Рассмотрим систему уравнений механики набухающих сред применительно к почвам, представляющим собой один из примеров набухающих пористых сред в природе:

$$\Gamma = \sigma^f + p \quad (25)$$

$$\varphi(\Theta, m, p, \sigma^f) = const \quad (26)$$

$$\dot{\Theta} + \partial q / \partial z = 0 \quad (27)$$

$$q = -(k/\eta)\partial p / \partial z, k = k_0 + A \cdot m; k_0, A - const \quad (28)$$

$$V_0 = V_0^{(0)} \exp \Theta \quad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [V_s(\rho_s - \rho_w) + \rho_w(1-m)V_0] = \alpha [(1-m)\pi - \sigma^f] \quad (30)$$

$$\pi = \frac{0.5eRT}{(1-m)V_0 - V_s} \quad (31)$$

Система уравнений (25) – (31) записана для простейшего случая – набухания (усадки) при взаимодействии среды с водой, не содержащей примесей.

Таким образом, искомыми функциями системы уравнений (25) – (31) являются $\sigma^f, p, \Theta, m, k, q, V_0, \pi$. Постоянными величинами модели являются $\Gamma, \eta, k_0, A, V_0^{(0)}, \rho_w, \rho_s, e, \alpha, R, T$. Граничные условия имеют вид:

$$P|_{z=z_0} = \Gamma, \quad P|_{z=0} = P_0 \quad (32)$$

где z_0 – толщина слоя. Начальные условия есть:

$$\Theta(z, 0) = 0 \quad (33)$$

На рис. 1 приведена схема процесса. Прямая линия АВ изображает профиль давления в слое глины толщиной z_0 , к которому приложена постоянная внешняя нагрузка G . Необходимо пояснить, почему профиль давления на рис. 1 имеет форму прямой. Для этого сделаем некоторые упрощения системы уравнений (25) – (31). Поскольку обычно для глинистых грунтов и почв $m \ll 1$, то m можно считать мало меняющейся функцией, т.е. попросту постоянной. Следовательно, можно убрать одно уравнение в (25) – (31). Пусть это будет уравнение (26). Таким образом, число уравнений и неизвестных функций сократилось до шести. Обезразмерим теперь уравнение (27):

$$\frac{1}{T_0} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \frac{q_0}{L} \frac{\partial (q/q_0)}{\partial (z/L)} = 0; T_0, q_0, L - const \quad (34)$$

В (34) использованы масштаб времени T_0 и характерная скорость фильтрации q_0 , которые определим ниже, $L = z_0$. Будем считать, что грунт или почва представляют собой структурно агрегированную среду с характерным размером агрегата r_a , фильтрация протекает в межагрегатном пространстве, а набухание осуществляется путем диффузионной пропитки агрегатов. Таким образом, $T_0 = r_a^2 / D$, где D – коэффициент диффузии. Очевидно, что комплекс

$$\frac{L}{q_0(T_0 + Lq_0^{-1})} \ll 1 \quad (35)$$

поскольку T_0 – быстро растущая функция r_a . Тогда уравнение (27) перейдет в

$$\partial q / \partial z = 0 \quad (36)$$

откуда немедленно следует

$$q = q_0 = const, q_0 = -\frac{k_0}{\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (37)$$

Решение второго уравнения в (37) с учетом граничных условий (32) имеет вид:

$$p = \Gamma + (\Gamma - p_0) \frac{z - z_0}{z_0} \quad (38)$$

Введем новую функцию процесса:

$$f = (1-m)V_0 - V_s \quad (39)$$

Физический смысл f заключается в том, что f есть объем воды, содержащейся в набухающем скелете пористой среды. Уравнение для f следует из системы (25 – 31) с учетом (38):

$$\frac{df}{dt} = \alpha \left[(1-m) \frac{0.5eRT}{f} - \Gamma + p \right] \quad (40)$$

Осредним последнее уравнение по z . Тогда имеем:

$$\frac{df}{dt} = b \left(\frac{a}{f} - 1 \right); \frac{eRT}{G} = a, \frac{0.5G\alpha}{\rho_w} = b, G = \Gamma - p_0 \quad (41)$$

Решение уравнения (41) легко находится:

$$f + a \ln \left(1 - \frac{f}{a} \right) = -bt \quad (42)$$

Вид решения приведен на рис. 2: квадратиками показаны экспериментальные величины, расчеты которых проводились по данным работы (Уоррел, 1978).

До сих пор мы предполагали, что набухание (усадка) приводит к изменению объема всей системы. Но на начальных стадиях процесса имеет место лишь изменение пористости без изменения объема среды в целом. Полученная зависимость (42) позволяет оценить это изменение. Действительно, будем считать $V_0 = const$, но m – переменной. Обозначим $f/a = x$. Тогда, раскладывая функцию $\ln(1-x)$ в левой части в ряд, получим для m :

$$m = 1 + \frac{V_s}{V_0} - \ln(\sqrt{2abt}/V_0) \quad (43)$$

Вид последней зависимости приведен на рис. 3. Расчет проводился на основании данных работы (Якобсон, Пуш, 1972). Треугольниками изображены экспериментальные данные. Как и на рис. 2, имеется хорошее согласие расчетных данных с результатами эксперимента.

Мы уже говорили выше, что предполагаем нашу среду структурно агрегированной. Введем поверхностную плотность заряда собственно твердых частиц среды σ . Тогда заряд агрегата есть $\beta\sigma r_a^2$, где β – структурный фактор

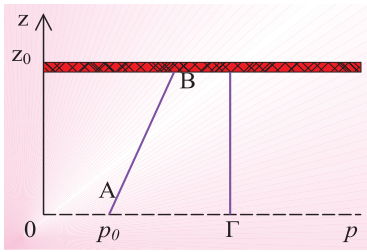


Рис. 1. Схема распределения давления в слое.

(для куба $\beta \geq 6$, знак $>$ возникает в силу того, что заряд может располагаться на внутренних поверхностях агрегата. Число таких кубиков будет

$$N = e/(\beta\sigma r_a^2).$$

Тогда для объема V_0 можно получить следующее выражение:

$$V_0 = \frac{e}{\beta\sigma r_a^2} r_a^3 = \frac{er_a}{\beta\sigma} \quad (46)$$

Подставим (22) в (18):

$$\frac{e'r_a - V_s}{a} + \ln\left(1 - \frac{e'r_a - V_s}{a}\right) = -bt/a, \quad (47)$$

где $e' = e/(\beta\sigma)$. Найдем производную dt/dr_a . Очевидно, что:

$$\frac{dt}{dr_a} = \frac{e'}{b} \cdot \frac{e'r_a - V_s}{1 - (e'r_a - V_s)/a} \quad (48)$$

$$\text{Для } r_a^f = V_s / e' = V_s \beta \sigma / e = V_s \beta e / (e\Sigma) = \beta / (\rho_s \sigma_i) \quad (49)$$

имеем $dt/dr_a = 0$. Здесь σ_i есть удельная поверхность почвы, т. е. внутренняя поверхность, приходящаяся на единицу массы скелета. При переходе через точку $r_a = r_a^f$ функция меняет знак с минуса на плюс, таким образом $r_a = r_a^f$

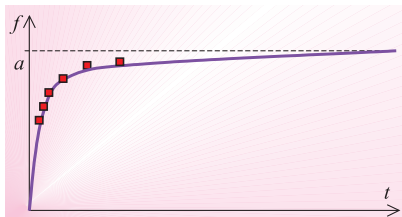


Рис. 2. Зависимость содержания воды в составе пористой матрицы от времени.

представляет собой точку минимума для функции dt/dr_a . Следовательно, если объем V_0 будет заполнен кубиками размером r_a^f , время набухания, или впитывания влаги этим объемом, будет минимально.

Интересен также следующий факт. Если взять последнее соотношение в (41) и предположить,

Рис. 3. Зависимость пористости набухающей среды от времени.

что $p_0 < 0$ (это соответствует протеканию процесса в условиях неполного насыщения), то p_0 можно рассматривать как дополнительную нагрузку, которая приводит к усадке слоя даже без внешней нагрузки на слой Γ (капиллярная усадка). Таким образом, вместе с нагрузкой Γ дополнительным фактором, обеспечивающим механическую стабильность почвы, является капиллярное давление.

Полученные результаты позволяют сформулировать следующие выводы по работе:

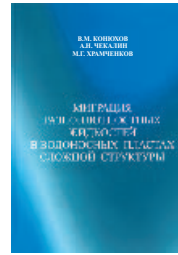
1. Набухающий слой грунта или почвы должен располагаться на некоторой глубине. Вес вышележащих пород Γ играет роль стабилизирующего фактора при взаимодействии набухающего слоя с водой.

Набухающий слой должен иметь возможность подстраиваться под нагрузку Γ , например, регулированием величины обменной емкости. Такие процессы протекают в почвах за счет взаимодействия с почвенной органикой

Казань: Изд-во Казанского университета, 2005.-158 с.

МИГРАЦИЯ РАЗНОПЛОТНОСТНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ВОДОНОСНЫХ ПЛАСТАХ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ

В.М. Конюхов, А.Н. Чекалин, М.Г. Храмченков



В монографии рассмотрены задачи, связанные с исследованием неустойчивого процесса распространения тяжелых жидких загрязнений в водоносных пластах сложной структуры. Построены математические модели фильтрационного и фильтрационно-диффузионного переноса разноплотностных жидкостей в пористой среде. Получены аналитические решения одномерных задач миграции рассола. Разработаны численные методы решения двумерных задач. Проведен анализ влияния напорного и инфильтрационного течений, а также структуры пласта на процессы распространения тяжелых неорганических и углеводородных жидкостей.



ISBN 5-98180-229-4

(Зубкова, Карпачевский, 2001). Отрицательное (капиллярное) давление играет роль дополнительной нагрузки и ведет к усадке, что также стабилизирует набухающую систему. Загрязнения изменяют величину осмотического давления (Храмченков, 2003), что меняет весь комплекс свойств набухающего слоя (реология, агрегатная структура и др.). Размер почвенных агрегатов не зависит от входящих в состав обменного комплекса катионов и характеризует способность почвы к всасыванию влаги.

Работа выполнена при поддержке гранта МНТЦ № 2364.

Литература

- Гугенгейм Э.А. *Современная термодинамика*. М.: Госх., 1941.
 Зубкова Т.А., Карпачевский Л.О. *Матричная организация почв*. М.: РУСАКИ, 2001.
 Уоррел У. *Глины и керамическое сырье*. М.: Мир, 1978.
 Храмченков М.Г. *Элементы физико-химической механики природных пористых сред*. Казань, Изд. Каз. мат. об-ва, 2003.
 Хргиан А.Х. *Физика атмосферы*. Л.: Гидрометеоиздат, 1969.
 Якобсон А., Пуш Р. *Явления тиксотропии в перематых мягких глинах. Сб. «Инженерно-геологические свойства глинистых пород и процессы в них»*. М.: Изд-во МГУ, 1972. с. 25-34.

Максим Георгиевич
Храмченков

Зам. директора по науке НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева КГУ, доктор физ.-мат. наук.

Резида Хавиловна Храмченкова – научный сотрудник аналитической лаборатории ИИ АН РТ.

