

ЧТО ТАКОЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ? ЭТО – СПЕКТРОСКОПИЯ КОЛЛЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ!

Претенциозный заголовок этой статьи неслучаен. Удастся строго показать, что диэлектрическая спектроскопия как *уникальный* спектроскопический метод применим для изучения разнообразных коллективных движений и различных взаимодействий между ними в промежуточной области масштабов. Оказывается, что если определенное множество степеней свободы неупорядоченной системы может быть описано в модели случайных или квазидетерминированных фракталов, то удастся строго математически показать, что множество самоподобных релаксационных или обменных процессов взаимодействия с термостатом, имеющих место среди групп коррелированных электрических диполей, сводится в частотной области к степенному «универсальному» отклику, который наблюдался проф. А.К. Джоншером для широкого класса гетерогенных систем. Кинетика таких процессов во временной области оказывается весьма необычной: релаксация суммарного вектора электрической поляризации описывается кинетическими уравнениями, содержащими дробные операторы дифференцирования и интегрирования с действительными или даже комплексно-сопряженными показателями. Получено расширительное толкование и аналитическое обобщение эмпирического уравнения Фогеля-Фалчера-Таммана. Как оказалось, это уравнение в температурной области описывает переход от одного коллективного движения к другому и справедливо не только для первого максимума, но и для любой другой экстремальной точки, включая и точки локальных минимумов. Новый подход позволяет свести воедино твердоустановленные, но ранее разрозненные экспериментальные факты и понять реальные возможности диэлектрической спектроскопии. Автор этой статьи считает, что, определив истинное место диэлектрической спектроскопии среди других «спектроскопий», она станет уникальным методом, изучающим свойства различных коллективных движений и их разнообразные взаимодействия в промежуточной области масштабов.

1. Основные требования к общей теории диэлектрической релаксации

Несмотря на существенный прогресс, достигнутый в широкополосной диэлектрической спектроскопии в измерительной области (Kremer, 2002), современное состояние теории диэлектрической релаксации остается *неудовлетворительным*. Как и ранее, для описания диэлектрических спектров по-прежнему используется набор эмпирических функций, которые необходимы для аналитического описания измеренной комплексной проницаемости в широком диапазоне частот. Наиболее популярное эмпирическое выражение, которое используется для описания уширенных и асимметричных пиков диэлектрических потерь, принадлежит Гаврильяку-Негами (ГН) (Böttcher & Bordewijk, 1992):

$$\varepsilon_{HN}^*(j\omega) = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{(1 + (j\omega\tau)^\nu)^\beta} \quad (1)$$

Здесь $\varepsilon_{HN}^*(j\omega)$ есть известное выражение ГН для комплексной восприимчивости. Традиционно, именно измеренные данные для асимметричных диэлектрических спектров пытаются подогнать под выражение (1) или используют их линейную комбинацию с различными подгоночными параметрами. Но при таком способе описания подгоночные параметры ν и β остаются *эмпирическими* и искомые связи со структурными или релаксационными параметрами вещества остаются неизвестными.

Другие подходы – теория связанных мод (Götze, Sjögren, 1992) или концентрационно-флуктуационная модель (Katana et al., 1995) помогают качественно понять поведение диэлектрических спектров (ДС) стеклообразующих систем, но в настоящее время эти подходы не могут претендовать на описание данных ДС в широком интервале частот или температур для различных гетерогенных материалов.

По нашему мнению, любая новая теория, претендующая на описание ДС в широком интервале частот и темпе-

ратур, должна удовлетворять следующим условиям:

1. Она должна объяснить, *как* многочисленные микроскопические движения, существующие в неоднородном материале, сводятся (или, иными словами, редуцируются) к нескольким степенным зависимостям, фигурирующим в аналитических выражениях для комплексной восприимчивости, выбранных для подгонки измеренных данных.

2. Она должна найти объяснение эмпирическому уравнению Фогеля-Фалчера-Таммана (ФФТ), которое широко применяется для описания зависимости пика потерь от температуры не только для стеклообразующих систем.

3. Новая теория должна объяснить, *почему* некоторые эмпирические выражения, предложенные Коул-Коулом и Коул-Дэвидсоном (Böttcher & Bordewijk, 1992), хорошо описывают поведение ДС в определенном интервале частот.

4. Она должна также найти объяснение явлению универсального отклика «УО», обнаруженное А.К. Джоншером (Jonscher, 1983; 1996) в широком классе исследованных им некристаллических материалов.

5. Эта теория должна быть применима для описания поведения комплексной восприимчивости в широком частотно-температурном интервале.

6. Новая теория не должна идеологически противоречить существующей теории неравновесных процессов.

Только в этом смысле новая теория может быть востребована для интерпретации данных и практических приложений в широкополосной ДС. Поэтому построение такого рода теории (желательно из первых принципов) является в настоящее время основной и актуальной проблемой ДС.

Основная цель этой статьи показать, *как* можно построить достаточно общую теорию диэлектрической релаксации, удовлетворяющей требованиям, перечисленным выше. Наше рассмотрение будет основываться на формализме Мори-Цванцига (Mori, 1961), но процедура расщепления функции памяти является достаточно *общей* и *оригинальной*. Эта процедура основывается на гипотезе, связанной с

существованием в системе самоподобной структуры среды и ограничена промежуточной областью масштабов, выраженной соответственно в предельных частотах ω_{\min} и ω_{\max} .

Можно математически строго показать, что суммирование по группе частично коррелированных кластеров, образующих возможную структуру неоднородной среды, где имеют место микропроцессы релаксации/обмена (они определены ниже) сильно-коррелированных групп электрических диполей с термостатом, приводит в частотной области к обобщенному рекап/реинд элементу (ОРЭ), совпадающим по своей частотной зависимости с Фурье-образом функции памяти и имеющим следующую зависимость от частоты

$$K_1(j\omega) = K_0 + C_0(j\omega)^{\pm\nu} + C_1(j\omega)^{\pm\nu+j(\Omega)} + C_1^*(j\omega)^{\pm\nu-j(\Omega)}. \quad (2)$$

Здесь текущая частота ω определена в ограниченном интервале $\omega_{\min} < \omega < \omega_{\max}$. Температурно-зависящие константы K_0, C_0, C_1 определяются некоторой функцией, описывающей процесс релаксации/обмена коррелированного кластера диполей с термостатом. Действительный степенной показатель ν , объединенный с возможной комплексной частью $\langle \Omega \rangle$, определяет комплексную фрактальную размерность некоторой самоподобной области диполей. Основной математический результат, помогающий обосновать предлагаемую структуру линейных уравнений для макроскопической поляризации $P(t)$, состоит в том, что эти уравнения содержат линейную комбинацию нецелых/дробных операторов дифференцирования или интегрирования

$$\sum_{k=1}^n \tau_k^{\nu_k} D_{t_0}^{\nu_k} [P(t) - P(t_0)] + P(t) = 0. \quad (3a)$$

Здесь $P(t)$ – величина полной поляризации, $D_{t_0}^{\nu}$ – определяет нецелый оператор Римана-Лиувилля, совпадающей с дробным интегралом ($\nu < 0$) или производной ($\nu > 0$) (Oldham & Spanier, 1974). Если некоторый нецелый оператор содержит комплексный показатель, то он входит в уравнение (3a) в форме триады вида

$$\tau_k^{\nu_k} D_{t_0}^{\nu_k} \Rightarrow \tau_k^{\nu_k} D_{t_0}^{\nu_k} + C_k \tau_k^{\nu_k+j(\Omega)_k} D_{t_0}^{\nu_k+j(\Omega)_k} + C_k^* \tau_k^{\nu_k-j(\Omega)_k} D_{t_0}^{\nu_k-j(\Omega)_k} \quad (3б)$$

Два последних слагаемых в зависимости от знака ν_k определяют оператор комплексного интегрирования или дифференцирования и входят всегда в виде комплексно-сопряженной пары. Параметры C_k и $\langle \Omega \rangle_k$ и их физическое истолкование будут даны ниже.

Структура линейного кинетического уравнения вида (3a) следует из феноменологического обоснованного подхода (ФОП), развитого в работах (Nigmatullin & Osokin, 2003; Nigmatullin et al., 2003 a; 2003 b) и подтвержденного экспериментально с помощью оригинального анализа доступных данных по комплексной восприимчивости, взятых из ведущих международных лабораторий. Процедура сведения множества частично-коррелированных микродвижений к одному коллективному движению, имеющему частотную зависимость, определенную выражением (2), помогает понять многие общие закономерности и особенно диэлектрической релаксации для широкого класса некристаллических материалов. Динамика таких коллективных движений описывается кинетическими уравнениями вида (3a), содержащими нецелые операторы дифференцирования и интегрирования с действительными или комплексно-сопряженными степенными показателями (3б).

2. Расщепление функции памяти и её сведение к обобщенному рекап/реинд элементу

Хорошо известно, что кинетическая теория Мори-Цванцига (Mori, 1961) получила широкое применение в описании кинетических свойств многих сложных систем (Yulmetuev & Khusnutdinov, 1994; Shurygin & Yulmetuev, 1989; Kalmykov & Limonova, 1989; Yulmetuev, 1976). В диэлектрической спектроскопии этот подход был недавно применен для описания свойств молекул воды (Arkhipov & Zavidonov, 2003). Цепочка зацепляющихся уравнений для произвольной временной корреляционной функции (ВКФ) (в нашем случае ВКФ пропорциональна величине полной поляризации) может быть записана в виде (Arkhipov & Zavidonov, 2003; Arkhipov, 2002)

$$\begin{aligned} \frac{dP(t)}{dt} &= -\omega_1^2 \int_{t_0}^t k_1(t-u) P(u) du, \\ \frac{dk_1(t)}{dt} &= -\omega_2^2 \int_{t_0}^t k_2(t-u) k_1(u) du, \end{aligned} \quad (4)$$

где $k_1(t), k_2(t)$ определяют функции памяти соответствующих порядков, а величины $\omega_1, \omega_2, \dots$, совпадают с частотными моментами, которые содержат равновесные средние. Основная проблема при использовании формализма Мори-Цванцига заключается в том, чтобы произвести физически обоснованное и непротиворечивое расщепление функций памяти и таким образом разорвать цепочку интегро-дифференциальных уравнений (4). Имея в виду подтверждение ФОП, развитого в работах (Nigmatullin & Osokin, 2003; Nigmatullin et al., 2003a; 2003b) из первых принципов, мы представим первое уравнение цепочки в виде

$$\begin{aligned} P(t) - P(t_0) + \omega_1^2 \int_{t_0}^t M(t-u) P(u) du &= 0, \\ M(t) &= \int_{t_0}^t (t-u) k_1(u) du. \end{aligned} \quad (5)$$

Причина такого представления связана с тем, что уравнения Мори-Цванцига не могут описать уширенные ДС. Как показывают численные расчеты, любая попытка описать ДС, исходя из исходных уравнений Мори-Цванцига при различных функциях памяти, оказывается безуспешной (Arkhipov, private communication). Возможно, это связано с тем фактом, что в природе существует широкий класс процессов, которые меняются медленнее первой производной. Такой процесс должен быть описан кинетическим уравнением с показателем производной меньше единицы

$$D_{t_0}^{\nu} \tau^{\nu} P(t) + P(t) = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) приводит в частотной области к известному выражению Коул-Коула для комплексной восприимчивости (Nigmatullin & Ryabov, 1997a; 1997b). Такого рода уравнения не могут быть выведены напрямую из формализма Мори-Цванцига, и дальнейшие исследования по обобщению этого формализма для описания такого рода «сверхмедленных» процессов нам представляются необходимыми. В этой работе мы предлагаем довольно общую процедуру расщепления функции памяти $M(t)$. Для дальнейших целей удобно рассмотреть функцию $M(t)$ как Лаплас-образ, зависящий от комплексного параметра s . Полагая $t_0 = 0$ и применяя Лаплас-преобразование к уравнению (5), получим

$$P(s) + \omega_1^2 M(s) P(s) = \frac{P(0)}{s}. \quad (7)$$

Для того, чтобы найти Лаплас-образ функции $M(s)$, описывающий процесс релаксации/обмена с термостатом (другими степенями свободы системы), мы выдвигаем следующие предположения:

A1. Мы предполагаем, что гетерогенный материал или его часть, участвующая в процессе диэлектрической релаксации, имеет *самоподобную* (фрактальную) структуру. Эта структура формируется из набора электрически активных кластеров. Каждый кластер включает в себя группу сильно-коррелированных диполей. Но различные кластеры слабо коррелируют друг с другом.

A2. Процесс релаксации/обмена некоторого n -го кластера, занимающего объём V_n , описывается некоторой микроскопической функцией $f(s\tau_n)$. Величина τ_n определяет некоторое характеристическое время релаксации. Если n -ый кластер содержит число диполей равное N_n , то процесс релаксации/обмена с термостатом описывается функцией

$$M(s) = \sum_n N_n f(s\tau_n). \quad (8)$$

Это выражение расширяет пределы применимости гипотезы аддитивности (когда $N_n \neq 1$), широко используемой в статистической механике, для случая слабо-коррелированных физических величин.

A3. Без потери общности мы предполагаем, что микроскопическая функция $f(z)$, зависящая в общем случае от комплексной переменной z и описывающая микроскопический акт взаимодействия с термостатом, имеет следующий вид

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_K z^K}{b_0 + b_1 z + \dots + b_P z^P}, \quad (9)$$

с показателями, удовлетворяющими условию $K \leq P+1$ и полиномом в знаменателе, имеющем только действительные отрицательные и/или комплексно-сопряженные корни

Случай (а): $\text{Re}(z) \ll 1$ ($c_0 = a_0/b_0, c_1 = a_1/b_0 - b_1/b_0^2$)

$$f(z) = c_0 - c_1 z + c_2 z^2 + \dots \quad (10a)$$

Случай (б) $\text{Re}(z) \gg 1$ ($A_1 = a_K/b_P, A_2 = a_K b_{P-1}/b_P^2$)

$$f(z) = \frac{A_1}{z^{P-K}} + \frac{A_2}{z^{P-K+1}} + \dots \quad (10b)$$

Для $K = P + 1$ мы определяем $f(z)$ как *релаксационную функцию*, описывающую микроскопический акт взаимодействия диполя с термостатом. Если $K < P + 1$ и полином в знаменателе (9) имеет кратные корни, то $f(z)$ определяется

как *обменная функция*, описывающая микроскопический акт взаимодействия диполя с термостатом. Причина такого разделения связана с тем фактом, что оригинал функции (9) в первом случае начинается со значения $f(0) \neq 0$ и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ монотонно. Для случая обменного взаимодействия $f(0) = 0$ и микроскопическая функция $f(t)$ при стремлении к нулю при $t \rightarrow \infty$ проходит по крайней мере через одно максимальное значение и может осциллировать или оставаться монотонной при $t \rightarrow \infty$.

A4. Мы предполагаем, что распределение значений N_n и набор времен релаксации τ_n удовлетворяют следующим масштабным соотношениям:

$$N_n = N_0 b^n, \quad \tau_n = \tau_0 \xi^n \quad (-N < n < N, N \gg 1, b, \xi > 0), \quad (11)$$

При $n = 0$ мы определяем число диполей N_0 и характеристическое время релаксации τ_0 , соответственно для кластера, имеющего *минимальное* число коррелированных диполей. Не будет большой ошибкой считать, что минимальный объём кластера совпадает с одним диполем. При этом предположении $N_0 = 1$, а время τ_0 определяет характеристическое время процесса релаксации/обмена одного диполя с термостатом. При этих предположениях Лаплас-образ функции памяти $M(t)$ принимает вид

$$M(z) \equiv S(z) = \sum_{n=-N}^{N-1} b^n f(z\xi^n), \quad (N \gg 1). \quad (12)$$

Здесь $z \equiv s\tau_0$. Можно заметить, что функция $S(z)$ для любого фиксированного значения N удовлетворяет следующему *точному* функциональному уравнению

$$S(z\xi) = \frac{1}{b} S(z) + b^{N-1} f(z\xi^N) - b^{-N} f(z\xi^{-N+1}). \quad (13)$$

Рассмотрим асимптотическое решение этого уравнения при $N \gg 1$ для величин b и $\xi < 1$. Принимая во внимание асимптотическое поведение функции $f(z)$ при малых (10а) и больших (10б) значениях $\text{Re}(z)$, можно найти условия, когда вклад последних двух слагаемых в (13) становится пренебрежимо малым для определенного интервала переменной z , удовлетворяющей условиям:

$$z_{\min} \ll |z| \ll z_{\max}. \quad (14)$$

Здесь

$$z_{\min} = \left(\frac{A_1}{b^N}\right)^{\frac{1}{P-K}} \xi^{N-1}, \quad z_{\max} = \frac{b}{(b\xi)^N}. \quad (15)$$

Для интервала (14) при $N \gg 1$ уравнение (13) упрощается

$$S(z\xi) = \frac{1}{b} S(z). \quad (16)$$

Решение этого уравнения может быть записано в виде (Le Mehaute, Nigmatullin & Nivanen, 1998)

$$S(z) = \pi_\nu (\ln z) z^{-\nu}, \quad \nu = \frac{\ln(1/b)}{\ln(1/\xi)}. \quad (17)$$

Здесь $\pi_\nu (\ln z \pm \ln \xi) = \pi_\nu (\ln z)$ определяет выражение для комплексной лог-периодической функции с действительным периодом $\ln(\xi)$. Если заменить приближенно сумму в (12) интегралом, то можно оценить нулевую Фурье-компоненту функции $\pi_\nu (\ln z)$. Определим эту компоненту из условия

№	b	ξ	ω _{min}	ω _{max}	Функциональное уравнение	Решения
1.	b < 1	ξ < 1	$\xi^{N-1} \left(\frac{A_1}{b^N}\right)^{\frac{1}{P-K}}$	$\frac{b}{(b\xi)^N}$	$S(z\xi) = \frac{1}{b} S(z)$	$S(z) = \pi_\nu (\ln z) z^{-\nu}, \quad \nu = \frac{\ln(1/b)}{\ln(1/\xi)}$
2.	b > 1	ξ < 1	$\xi^{N-1} \left(\frac{A_1}{b^N}\right)^{\frac{1}{P-K}}$	$\frac{b}{(b\xi)^N}$	$S(z\xi) = \frac{1}{b} S(z) + r_0$ $r_0 = c_0 b^{N-1}$ is finite value	$S(z) = \pi_\nu (\ln z) z^\nu + \frac{br_0}{b-1}, \quad \nu = \frac{\ln(b)}{\ln(1/\xi)}$
3.	b < 1	ξ > 1	$\frac{(A_1 b^{N-1})^{\frac{1}{P-K}}}{\xi^N}$	$\frac{(b\xi)^N}{c_1 \xi}$	$S(z\xi) = \frac{1}{b} S(z) + r_0$ $r_0 = c_0 b^{N-1}$ is finite value	$S(z) = \pi_\nu (\ln z) z^{-\nu} - \frac{br_0}{1-b}, \quad \nu = \frac{\ln(1/b)}{\ln(\xi)}$
4.	b > 1	ξ > 1	$\frac{(A_1 b^{N-1})^{\frac{1}{P-K}}}{\xi^N}$	$\frac{(b\xi)^N}{c_1 \xi}$	$S(z\xi) = \frac{1}{b} S(z)$	$S(z) = \pi_\nu (\ln z) z^{-\nu}, \quad \nu = \frac{\ln(1/b)}{\ln(1/\xi)}$
5.	b = 1	ξ < 1	$(A_1)^{\frac{1}{P-K}} \xi^{N-1}$	$c_1 \xi^{-N}$	$S(z\xi) = S(z) + c_0$	$S(z) = \pi_0 (\ln z) + c_0 \frac{\ln(z)}{\ln(\xi)}$

Табл. 1. Решения функционального уравнения (16) для различных значений масштабных параметров b и ξ .

$$\langle \pi_\nu(\ln z) \rangle z^{-\nu} \approx \int_{u=-N+1}^{N-1} b^u f(z\xi^u) du. \quad (18)$$

Принимая во внимание асимптотические разложения (10) и условие $b, \xi < 1$, получаем следующее выражение

$$\langle \pi_\nu(\ln z) \rangle \equiv C_0(\nu) = \frac{1}{\ln(1/\xi)} \int_0^\infty x^{\nu-1} f(x) dx. \quad (19)$$

По аналогии с этими расчетами можно рассмотреть и другие соотношения между параметрами b и ξ (см. Табл. 1). Анализируя эти случаи, можно утверждать, что релаксационные/обменные процессы объединенной системы слабо-коррелированных кластеров с термостатом сводятся к обобщенному рекап/реинд элементу, если Лаплас-параметр заменить на комплексную частоту $s \equiv j\omega$.

3. Численная проверка $\pi_\nu(\ln z)$ с помощью метода собственных координат

Разлагая функцию $\pi_\nu(\ln(z))$ в ряд Фурье и удерживая только три члена, выражение для суммы $S(z)$ можно приближенно представить в виде

$$S(z) \approx z^{-\nu} (C_0 + C_1 \exp(j <\Omega> \ln z) + C_1^* \exp(-j <\Omega> \ln z)) = z^{-\nu} (C_0 + |C_1| \cos(<\Omega> \ln z - \psi)) = C_0 z^{-\nu} + C_1 z^{-\nu+j<\Omega>} + C_1^* z^{-\nu-j<\Omega>}. \quad (20)$$

Здесь $\langle \Omega \rangle$ есть усредненная частота (мода), связанная с ведущей компонентой n , фигурирующей в точном Фурье-разложении, а C_j в (20) определяет комплексную амплитуду $C_j = |C_j| \exp(j\psi)$. Среднее значение моды $\langle \Omega \rangle$ определяется выражением

$$\langle \Omega \rangle = \frac{2\pi <n>}{\ln \xi}. \quad (21)$$

Естественно определить выражение (20) как одно-модовое приближение (ОМП). Для проверки ОМП методом собственных координат (СК), который достаточно подробно изложен в работах (Nigmatullin, 1998; 2000; Nigmatullin et al., 2002; Nigmatullin & Smith, 2003), мы выбрали функцию

$$f(z\xi^n) = \frac{1}{1 + z\xi^n + (z\xi^n)^2}. \quad (22)$$

Для того, чтобы извлечь логарифмические осцилляции, обусловленные функцией $\pi_\nu(\ln(z))$, мы зафиксировали значения b в интервале $(0.05 \leq b \leq 1)$ и положили $\xi = 0.1$. Переменная z была заключена в интервале $(0.1 \leq |z| \leq 10000)$. Численные расчеты преследовали цель: проверить соответствие точного выражения (13) приближенному (20) при асимптотических условиях (10). Соответствующие осцилляции показаны на Рис. 1, а эффективность подгонки точного выражения для суммы в рамках ОМП – на Рис. 2 при некоторых значениях $b = 0.1, 0.5, 0.9, 1.0$ и $\xi = 0.1$.

Значения подгоночных параметров для различных b и $\xi = 0.1$ приведены в Табл. 2. Расчеты показывают, что ОМП достаточно точно описывает лог-периодическую функцию, которая отражает дискретную структуру рассматриваемого фрактала. Из анализа данных Табл. 2 следует, что основной вклад в логарифмические ос-

цилляции в данном конкретном случае вносит Фурье-компонента с $\langle n \rangle \approx 1$.

Основываясь на выражении для Лаплас-образа (22), легко получить во временной области обобщенное выражение для дробного интеграла Римана-Лиувилля для комплексной степени. Используя соотношение (Korn & Korn, 1961)

$$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = P^{-\alpha}, \quad (23)$$

можно представить функцию памяти во временной области как

$$M(t) = C_0 \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} + C_1 \frac{t^{\nu+j<\Omega>-1}}{\Gamma(\nu+j\Omega)} + C_1^* \frac{t^{\nu-j<\Omega>-1}}{\Gamma(\nu-j\Omega)}. \quad (24)$$

Первый член в последнем выражении представляет собой оценку интегрального ядра $M(t)$ в *континуальном* приближении и правильно описывает коллективные движения, распределенные на *случайных* фракталах. Другие два члена в (24) в ОМП отражают существование лог-периодических осцилляций, возникающих на дискретных фракталах и тем самым модифицирующих коллективное движение, имеющих место на такого рода структурах. Используя определение дробного интеграла в форме Римана-Лиувилля, который представляется в виде свертки функции $M(t)$ с гладкой функцией, можно записать кинетические уравнения для полной поляризации и одного редуцированного (усредненного по самоподобной структуре) коллективного движения, распределенного по возможной дискретной фрактальной структуре, в виде

$$(P(t) - P(0)) + \omega^2 [C_0 D_0^{-\nu} + C_1 D_0^{-\nu+j(\Omega)} + C_1^* D_0^{-\nu-j(\Omega)}] P(t) = 0. \quad (25)$$

Для случайной фрактальной структуры эффект перидичности исчезает ($C_1 = 0, \langle \Omega \rangle = 0$), и последнее уравнение сводится к кинетическому уравнению (6), приводя в частотной области к известному выражению Коул-Коул для комплексной восприимчивости.

4. Подтверждение ФОП и новые выражения для комплексной восприимчивости

В работах (Nigmatullin & Osokin, 2003; Nigmatullin et al., 2003a; 2003b), основываясь на анализе «сырых» ДС, полученных автором из различных международных лабораторий, были предложены новые форматы представления данных в частотной области. На основании более надежного анализа данных по ДС был развит феноменологически обоснованный подход (ФОП), который привел к новым

№	b	ν	<Ω>	C ₀	C ₁	C ₂	ψ	<n>	Stdev
0	0.05	1.30103	2.71757	0.60239	0.00862	0.00574	0.58798	0.9959	0.05935
1	0.1	1	2.7176	0.52519	0.01036	-3.98995E-4	-0.03851	0.99591	0.05175
2	0.2	0.69897	2.71757	0.60239	0.00815	-0.00639	-0.66521	0.9959	0.05935
3	0.3	0.52288	2.71754	0.75679	0.0053	-0.00889	-1.03337	0.99589	0.07457
4	0.4	0.39794	2.71746	0.97866	0.00281	-0.00996	-1.29561	0.99586	0.09643
5	0.5	0.30103	2.71447	1.29843	6.3437E-4	-0.01032	-1.50941	0.99476	0.12793
6	0.6	0.22185	2.71751	1.78592	-9.79814E-4	-0.01031	1.47607	0.99588	0.17596
7	0.7	0.1549	2.71751	2.60713	-0.00242	-0.01008	1.33525	0.99588	0.25688
8	0.8	0.09691	2.71752	4.26176	-0.00363	-0.00972	1.21327	0.99588	0.4199
9	0.9	0.04576	2.71753	9.24966	-0.00465	-0.00928	1.10571	0.99589	0.91135
10	1	0	2.71753	19.2374	-0.00553	-0.00879	1.00953	0.99589	0.99543

Табл. 2. Значения подгоночных параметров, полученные при численной проверке суммы (19) с функцией (29а) методом СК ($x = 0.1$). В последней колонке приведены значения стандартного отклонения для разности между абсолютным значением суммы $S(z)$ и подгоночной функцией, вычисленной в ОМП.

кинетическим уравнениям вида (3). ФОРП и новые форматы позволяют с большей достоверностью, чем ранее, распознать искомое выражение для комплексной восприимчивости, подогнать частотные данные под новые функции для комплексной восприимчивости, а также получить обобщение выражения для эмпирического закона Фогеля-Фалчера-Таммана (ФФТ), описывающего температурную зависимость пика диэлектрических потерь. В предыдущем разделе мы математически строго показали, что множество микровзаимодействий диполей с термостатом, объединенных в самоподобные кластеры, сводятся к некоторому коллективному движению, выраженному аналитически в виде ОРЭ (2). Разумно предположить, что неупорядоченная система может содержать несколько типов коллективных движений, соответствующих различным ОРЭ.

Если, к примеру, мы имеем два типа коллективных движений, то у нас появляются две возможности: они могут быть объединены между собой последовательно или параллельно. Для первого случая можно получить следующее выражение для комплексной диэлектрической проницаемости (Nigmatullin & Osokin, 2003; Nigmatullin et al., 2003)

$$\begin{aligned} \varepsilon(j\omega) &= \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon(0) - \varepsilon_\infty}{1 + R(j\omega)}, \\ R(j\omega) &= \left[(j\omega\tau_1)^{-\nu_1} + (j\omega\tau_2)^{-\nu_2} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (26)$$

Эта комплексная функция соответствует линейной комбинации двух функций памяти. Для того, чтобы вывести выражение для $\varepsilon(j\omega)$, соответствующее параллельно объединению двух ОРЭ, мы предположим, что Лаплас-функция, описывающая процесс обмена с термостатом, имеет вид (для этого необходимо положить в (9) $\alpha_0 = 0$)

$$f(s) = s f_1(s). \quad (27)$$

Для этого случая $S(z)$ определяется выражением

$$S(z) = \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} b^n z \xi^n f_1(z \xi^n) = z \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} (b \xi)^n f_1(z \xi^n) = z S_1(z) \quad (28)$$

Если сумма $S_1(z)$ вновь удовлетворяет условиям (14), то для аддитивной комбинации двух функций памяти мы получим выражение для комплексной проницаемости, объединяющее два коллективных движения, объединенные друг с другом параллельно

$$\begin{aligned} \varepsilon(j\omega) &= \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon(0) - \varepsilon_\infty}{1 + R(j\omega)}, \\ R(j\omega) &= \left[(j\omega\tau_1)^{\nu_1} + (j\omega\tau_2)^{\nu_2} \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Процедура распознавания, основанная на разделении ДС с помощью степенной функции (Nigmatullin & Osokin, 2003; Nigmatullin et al., 2003 a; b), показывает, что выражение (26) более предпочтительно по сравнению с (29), которое пока идентифицировано только в одном случае (Abdul-Gader Jafar & Nigmatullin, 2001). Интересно также отметить, что выражения (26) и (29) воспроизводят так называемое «добавочное крыло» (excess wing), наблюдаемое во многих стеклообразующих материалах (Lunkenheimer, 1999). Соответствующие графики, рассчитанные с помощью функций (26) и (29), имитирующие наличие добавочного крыла, показаны на рис. 3 а, б. Если неоднородная среда сохраняет память о дискретной структуре фрактала, то можно ожидать, что ОРЭ окажется приемлемым для описания такого

рода квазирегулярных структур. В этом случае один действительный показатель степени должен быть заменен на триаду нецелых операторов: один оператор с действительным показателем и пара операторов, содержащая комплексно-сопряженные степени. К примеру, обычное выражение Коула-Коула для описания квазидискретной фрактальной структуры должно быть записано в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon(j\omega) &= \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon(0) - \varepsilon_\infty}{1 + R(j\omega)}, \\ R(j\omega) &= \left[(j\omega\tau)^\nu + C_1 (j\omega\tau)^{\nu+j(\Omega)} + C_1^* (j\omega\tau)^{\nu-j(\Omega)} \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Последние два слагаемых исчезают, если среда становится полностью случайной, и набор масштабов, генерирующих соответствующий фрактал, становится непрерывным.

5. Температурная зависимость нецелых показателей и обобщение эмпирического уравнения Фогеля-Фалчера-Таммана

В работе (Ryabov & Feldman, 2002) выражение для показателя степени ν (в обозначениях, принятых в этой работе) может быть записано в виде

$$\nu = \frac{\ln(b)}{\ln(\xi)}. \quad (31)$$

Следуя основным идеям этой работы, выражение для масштабного коэффициента ξ может быть записано как

$$\xi = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad (32)$$

где τ – среднее время релаксации, характеризующее некое коллективное движение, τ_0 – предельное время, соответствующее граничному масштабу. Параметр b может быть связан с относительным числом диполей, локализованных в некотором коррелированном кластере. Можно написать следующее выражение для b , имея в виду, что среднее время релаксации может быть связано с возможным квази-диффузионным процессом внутри группы коррелированных диполей, образующих кластер размера R

$$b = G \left(\frac{R}{R_0} \right)^{d_f}, \quad (33)$$

где d_f определяет фрактальную размерность, G – геометрический форм-фактор, зависящий от формы кластера. Радиус R_0 определяет предельный масштаб пространственного кластера. Для $b < 1$ кластер размера R_0 должен быть выбран как кластер максимального размера, в другом предельном случае $b > 1$ этот кластер должен быть отсчитан от минимального кластера. Можно обобщить соотношение между R и τ , имея в виду обобщенный диффузионный процесс, перераспределяющий энергию потерь внутри кластера

$$R^2 = D_\theta \tau^\theta. \quad (34)$$

Здесь показатель $\theta = 1/2$ соответствует обычному диффузионному процессу, для $\theta > 1/2$ мы имеем случай сверхдиффузии, и, наконец, случай $\theta < 1/2$ соответствует процессу субдиффузии (Montroll & Weiss, 1965, 1967; Carreras et al., 1999). Параметр D_θ в (34) может быть связан с коэффициентом самодиффузии. Комбинируя последние три выражения, получим соотношение между показателем ν и средним временем релаксации τ в виде

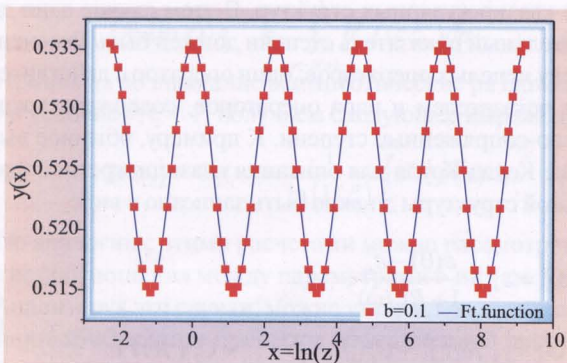


Рис. 1а. Численная проверка лог-периодических осцилляций, вычисленных для $b = 0.1, \xi = 0.1$ ($\nu = 1$). Сплошная линия соответствует подгоночной функции, вычисленной в ОМП.

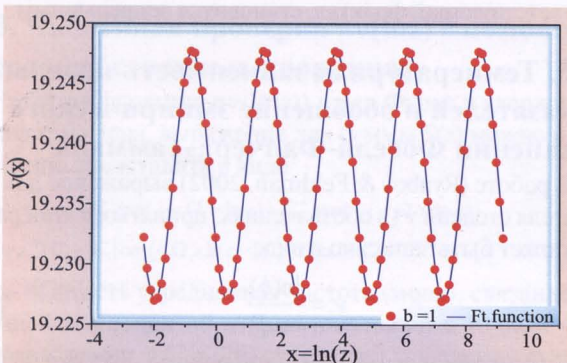


Рис. 1б. Проверка осцилляций для значений $b=1.0, \xi=0.1$ ($\nu=0$). К сожалению, два графика не могут быть совмещены в одном рисунке. Другие графики, рассчитанные для промежуточных значений b (они не приводятся), также демонстрируют относительно высокую точность ОМП. Все значения подгоночных параметров приведены в Табл. 2.

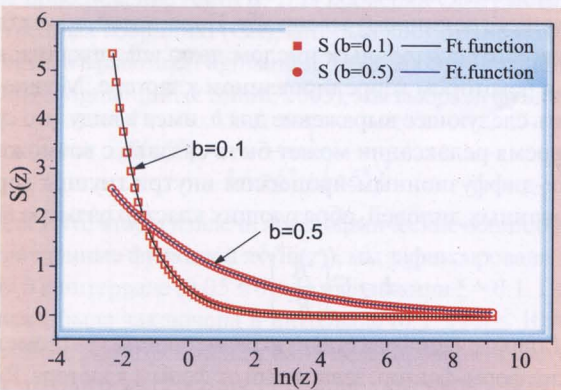


Рис. 2а. Вычисленные значения для суммы $S(z)$ и её подгонка в ОМП для значений $b = 0.1$ и $b = 0.5$.

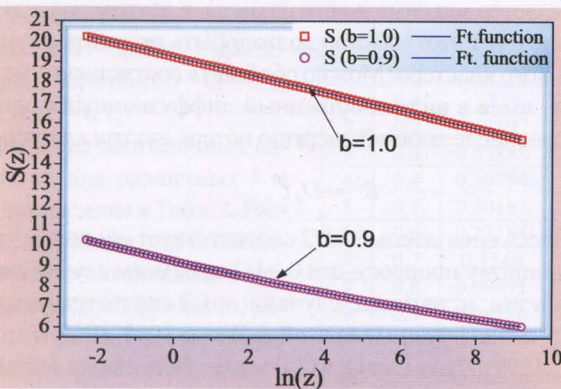


Рис. 2б. Вычисленные значения для суммы $S(z)$ и её подгонка в ОМП, показанная для значений $b = 0.9$ и $b = 1.0$. Для $b = 1$ поведение $S(z)$ вырождается в прямую линию.

$$\nu = \nu_0 \frac{\ln(\tau/\tau_s)}{\ln(\tau/\tau_0)}, \quad \nu_0 = \frac{\theta d_f}{2}, \quad \tau_s = \left[\frac{R_0 D_\theta^{-2}}{G^{1/d_f}} \right]^{\frac{2}{\theta}} \quad (35)$$

Несмотря на простоту, это выражение допускает несколько иную интерпретацию (сравни с истолкованием этой формулы в (Ryabov & Feldman, 2002)) и обобщение (когда $\theta \neq 1/2$) для процесса самодиффузии в системе коррелированных кластеров. Необходимо иметь в виду, что она получила подтверждение на эксперименте. Следуя этим простым идеям, можно получить также зависимость усредненной моды $\langle \Omega \rangle$ от τ . Из выражения (23) следует

$$\langle \Omega \rangle = \frac{2\pi \langle n \rangle}{\ln \xi} = \frac{2\pi \langle n \rangle}{\ln(\tau/\tau_0)}. \quad (36)$$

Можно предположить (Nigmatullin et al., 2003), что возможная и наиболее простая связь между τ и температурой T может быть выражена через закон Аррениуса

$$\tau(T) = \tau_A \exp(E/T), \quad (37)$$

где E определяет среднюю энергию реориентации рассматриваемой фрактальной подсистемы, в которой имеет место коллективное движение. Основываясь на выражениях (35) и (37), мы вывели математическое уравнение ФФТ и его возможные обобщения (Nigmatullin et al., 2003). Параметры, входящие в уравнение ФФТ в новой трактовке, отражают специфический переход от одного типа коллективного движения к другому. С этой точки зрения, переход «стекло-гель» можно рассматривать как частный случай фазового перехода между двумя типами коллективных движений, выраженных в параметрах уравнения ФФТ. В случае коллективного движения одного типа два показателя степени, описывающие левую и правую ветви, окружающие точку экстремума, будут совпадать друг с другом (к примеру, если диэлектрические спектры описываются функциями Коула-Коула или Коула-Дэвидсона). Температурная зависимость пика диэлектрических потерь для коллективного движения одного типа будет описываться уравнением Аррениуса (37), записанного для $\omega_p(T) = 1/\tau(T)$ и для одного вида коллективного движения, переходящего через экстремум $T_{VF} = 0$ и $DT_{VF} = E$.

Новая теория диэлектрической релаксации позволяет естественным образом объяснить явление «универсального отклика» (УО), который наблюдался Э. Джоншером с сотрудниками во многих неоднородных материалах. В соответствии с этими наблюдениями (Jonscher, 1983, 1996), поведение комплексной восприимчивости в некотором ограниченном интервале частот $\omega_{\min} < \omega < \omega_{\max}$ имеет вид

$$\chi(j\omega) = C_n (j\omega)^{-1+n}, \quad (38)$$

$$\chi(j\omega) = A_m - B_m (j\omega)^m, \quad 0 < m, n < 1,$$

что и идентифицируется с феноменом УО. Если сравнить аналитические выражения для функции памяти $M(j\omega)$, приведенные в Табл. 1 с выражениями (38), то можно легко заметить, что они формально совпадают друг с другом.

Наш подход позволяет связать эмпирические показатели степеней в (38) с фрактальной структурой среды и объяснить физический смысл появления триады показателей, в которую как минимум входит пара комплексно-сопряженных показателей (эта триада в частотной области совпадает с выражением (2) при $K_0 = 0$). Кроме того, новый подход позволяет прояснить смысл констант A_m, B_m и C_n в выражении (38). Они совпадают с нулевыми Фурье-компонентами соответствующих лог-периодических функций. Уравнение

ФФТ и феномен УО помогают истолковать «физику» диэлектрических спектров в широком диапазоне частот и температур. Явление УО характеризует в *редуцированной* форме некоторое коллективное движение в промежуточной области масштабов и должно наблюдаться на крыльях спектров, окружающих точку экстремума. В свою очередь, точка экстремума соответствует переходной области и может быть связана либо с точкой максимума, либо

минимума. Это означает, что уравнение ФФТ должно быть справедливо для произвольной экстремальной точки, а не только для α -пика, как это считалось до сих пор. Можно проверить справедливость этого вывода для точки минимума, образованной левой низкочастотной ветвью проводимости и правой ветвью, формирующей α -пик. Мы получили данные по комплексной диэлектрической проницаемости из лаборатории д-ра Дж. Смита (университет де Монфорта, Лэстер, Великобритания). Эти данные были получены для жидкого полиметилметакрилата без добавления пластификатора (торговая марка Eudragit RS Melt), измеренного в частотной области (0.1-10⁶ Гц) и температурного диапазона (353.15-403.15 К с шагом 2.5 К). Полная трактовка этих данных была реализована в диссертации С.И. Осокина. Здесь имеет смысл привести лишь температурную зависимость первого локального минимума и подгонку ее под уравнение ФФТ. Зависимость действительно описывается уравнением ФФТ с параметрами: $T_{VF} = 262.6 \pm 10.6$ (К), $\omega_0/2\pi = 4.4768 \cdot 10^4$ (sec⁻¹) $D = 4.823$ (см. рис. 4).

5. Обсуждение основных результатов

В заключение мы хотим подчеркнуть основные результаты и факты, позволившие построить согласованную и довольно общую теорию диэлектрической релаксации в некристаллических материалах, претендующую на описание ДС в широком классе неоднородных материалов (полимеры, полупроводники, стекла, гели, растворы и т.д.).

1. Основываясь на предположении о фрактальной структуре среды некоего неупорядоченного кристаллического материала, образованного из набора слабо-коррелированных самоподобных кластеров, содержащих, в свою очередь, группы сильно-коррелированных диполей, можно доказать, что частотная зависимость функции памяти совпадает с ОРЭ (см. уравнение (2)).

2. Каждому ОРЭ соответствует некоторый коллективный процесс релаксации/обмена, получающийся в результате редукции (усреднения) группы самоподобных микроскопических движений диполя с термостатом на фрактальной структуре. Каждое микродвижение описывается в частотной области функцией $f(j\omega)$, совпадающей с Фурье-компонентой временной функции $f(t)$ [$f(t) \stackrel{FT}{=} f(j\omega)$] и соответствующей определенному типу микродвижения.

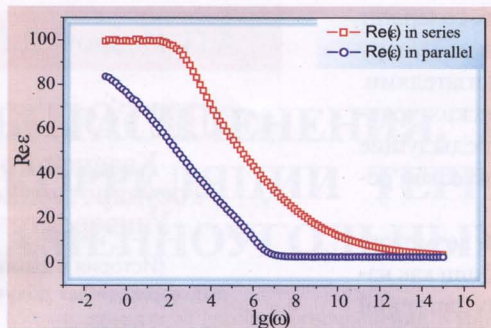


Рис. 3а. Рассчитанные значения реальной части комплексной восприимчивости, соответствующие выражениям (34) и (37).

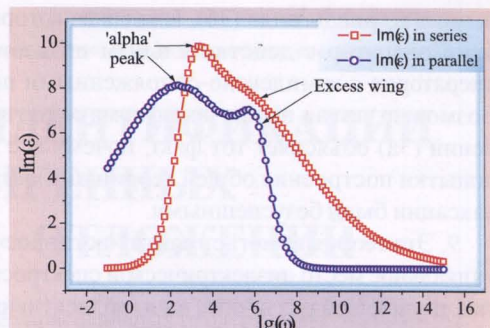


Рис. 3б. Мнимые части этих функций имитируют так называемое «избыточное крыло» (excess wing), которое наблюдается в стеклообразующих системах. Поэтому эти функции могут быть с успехом применены для подгонки реальных данных в частотной области. Выбранные параметры имеют значения: $v_1 = 0.21$, $v_2 = 0.95$, $\tau_1 = 0.5 \cdot 10^{-2}$, $\tau_2 = 0.4 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon_\infty = 3$, $\epsilon_s = 100$, (два ОРЭ, соединенные последовательно); $v_1 = 0.21$, $v_2 = 0.9$, $\tau_1 = 0.5 \cdot 10^{-3}$, $\tau_2 = 0.4 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon_\infty = 3$, $\epsilon_s = 100$, (два ОРЭ, соединенные параллельно).

3. Результаты такой редукции (см. Табл. 1) служат бесспорным теоретическим доказательством существования феномена УО, обнаруженного экспериментально группой Э. Джоншера во многих неоднородных материалах.

4. Каждая локальная точка максимума/минимума диэлектрического спектра может рассматриваться как переходная область, отделяющая друг от друга два типа коллективного движения. Такая переходная область описывается обобщенным уравнением ФФТ, которое получает в этом подходе расширенное истолкование.

5. Теория предсказывает существование специфической триады (2), составленной в частотной области из трех показателей дробной степени: одна степень всегда действительна, а две другие, входящие линейно, содержат пару комплексно-сопряженных показателей. Такая триада должна появляться в случае, если дискретная фрактальная структура, построенная на счетном множестве масштабов, является преобладающей. Для совершенно случайной фрактальной структуры все непрерывное множество масштабов участвует в образовании этой структуры. В этом случае дискретная сумма (12) может быть заменена интегралом вида (18). Лог-периодическая функция усредняется, и в триаде дробных показателей (2) выживает только его действительная часть.

6. Эта теория предсказывает обобщение выражений для комплексной восприимчивости (30) и нуждается в экспериментальной проверке.

7. Теория предсказывает также температурную зависимость ведущей моды $\langle \Omega \rangle$ (36), которая тоже нуждается в экспериментальной проверке.

8. Наиболее важное предсказание связано с обоснованием ФОП, что приводит к кинетическим уравнениям, содержащим нецелые интегралы или производные, объеди-

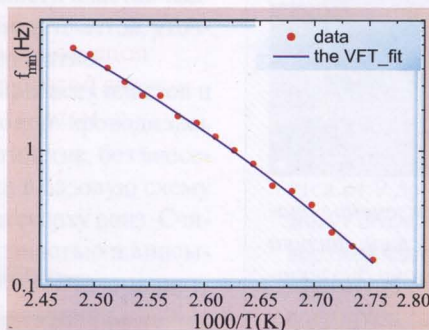


Рис. 4. Подтверждение выполнения уравнения ФФТ для минимальной точки, образованной ветвью низкочастотной дисперсии (слева) и ветвью, образующей α -пик (справа). Эти данные получены для полиметилметакрилата с пластификатором (Торговая марка Eudragit RS Melt), измеренные в частотной области (0.1-10⁶ Hz) и в интервале температур (353.15-403.15 К с шагом 2.5 К). Подгоночные параметры для уравнения ФФТ имеют значения: $T_{VF} = 262.6 \pm 10.6$ (К), $\omega_0/2\pi = 4.4768 \cdot 10^4$ (sec⁻¹) $D = 4.823$.

ненные в триады вида (3б), каждая из которых содержит один оператор с действительным показателем и пару операторов с комплексно-сопряженными показателями. Возможно, такая необычная форма кинетических уравнений (3а) объясняет тот факт, почему все предыдущие попытки построения общей теории диэлектрической релаксации были безуспешными.

9. Эта теория помогает найти «истинное» и возможно уникальное место диэлектрической спектроскопии как науки, изучающей различные виды коллективных движений и их взаимодействия между ними в промежуточной области масштабов.

Мы считаем, что со временем эта теория будет, несомненно, востребована для описания и интерпретации различных диэлектрических спектров, несущих информацию о различных видах коллективных движений и их взаимодействиях между собой в широкой области температур и частот.

Литература

Arkhipov V.I. & Zavidonov A.Yu. *J.Molec.Liquids*, 106/2-3, 2003. 155.
 Arkhipov V.I. *J. of Non-Cryst. Solids*, 305, 2002. 127.
 Böttcher C.J.F., Bordewijk P. *Theory of Electric Polarization*, Elsevier, Amsterdam, 1992.
 Götz W., Sjögren L. *Rep. Progr. Phys.*, 55, 1992. 241.
 Jonscher A.K., *Dielectric Relaxation in Solids*, Chelsea Dielectric press, London, 1983.
 Jonscher A.K. *Universal Relaxation Law*, Chelsea Dielectric press, Oxford, 1996.
 Kalmykov Y.P. and Limonova S.V. *J. Molec. Liq.*, 43, 1989 71.
 Katana G. et al. *Macromolecules*, 28, 1995. 2714.
 Kremer F. *J. Non-Cryst. Solids*, 305, 2002, 1.
 Le Mehaute A., Nigmatullin R.R., Nivanen L. *Fleches du Temps et Geometrie Fractale*, Hermez, Paris, 1998.
 Mori H. *Progr. Theor. Phys.*, 30, 1963. 578.
 Nigmatullin R.R. *Appl. Magn. Resonance*, 14, 1998. 601.
 Nigmatullin R.R. *Physica A*, 285. 2000. 547.
 Nigmatullin R.R. Abdul-Gader Jafar M.M., Shinyashiki N., Sudo S. and Yagihara S. *J. Non-Cryst. Solids*, 305, 2002. 96.
 Nigmatullin R.R., Osokin S.I. *J. Signal Proc.*, 83, 2003. 2433.
 Nigmatullin R.R., Osokin S.I. and Smith G. *J. Phys.D.: Appl.Phys.* 36, 2003. 2281.
 Nigmatullin R.R., Osokin S.I. and Smith G. *J. Phys.C.: Condens. Matter*, 15, 2003. 3481.
 Nigmatullin R.R., Ryabov Ya.E. *Phys. Solid State*, 39, 1997. 87.
 Nigmatullin R.R., Ryabov Ya.E. *Russ. Phys. J.*, 40, 1997. 314.
 Nigmatullin R.R. and Smith G., *Physica A*, 320, 2003. 291.
 Oldham K., Spanier J. *The Fractional Calculus*, Academic press, New York, 1974.
 Yulmetuev R.M., Khusnutdinov N.R. *J. Phys. A.*, 27, 1994. 5363.
 Shurygin V.Yu., Yulmetuev R.M. *Zh. Eks. Theor. Fiz.* 96, 1989. 938; (*Sov. JETP*, 69, 1989) 532 and references there in).
 Sornette D. *Phys. Reports*, 297, 1998. 239.
 Sornette D., Johansen A., Arnedo A., Muzy J.-F., Saleur H. *Phys. Rev. Lett.*, 76, 1996. 251.
 Yulmetuev R.M. *Phys. Let.*, 56A, 1976. 387.
 Zwanzig R. in *Lectures in Theoretical Physics*, ed. by W.E. Brittin et al., Interscience Publ. Inc., New York, vol. III. 1961. 106-141.



Равиль Рашидович Нигматуллин
 Профессор Казанского университета,
 доктор физико-математических наук.
 Автор более 120 опубликованных работ,
 3 обзоров и одной монографии. Область
 научных интересов: статистическая ме-
 ханика сильно-коррелированных систем, извлечение сла-
 бых сигналов и случайных последовательностей, физика
 гетерогенных систем с приложением к теории диэлект-
 риков и фракталов.

А.П. Исаков, Е.П. Исаков

ЛЕТОПИСЬ Казанского Государственного Университета

(История в фактах,
 подтвержденных документами)

В двух томах. Том 1: 1804 – 1945 г.г. 2004.
 488 с. Том 2: 1946 – 2004 г.г. 2005. 576 с. Казань.
 ООО «Дизайн-студия «МИАН».



Этот двухтомный труд является результатом многолетних исследований архивных материалов по истории одного из старейших в России, славного своими научными школами Казанского Университета за 200 лет его существования. Авторами исследовано более 50 тысяч единиц архивного хранения из более чем 80 тысяч, находящихся в Национальном архиве Республики Татарстан, 150 тысяч — в архиве Университета и нескольких тысяч — в архивах Москвы и С.-Петербурга. В этой летописи авторы отразили период становления Казанского Университета, появление кафедр, отделений, факультетов, создание лабораторий, музеев, библиотек, метеорологической и астрономической обсерваторий, ботанического сада, анатомического театра, становление и развитие ряда научных школ и направлений - математической, физической, химической, астрономической и др.

ISBN 5-902788-01-3, 5-902788-03-X

Ю.Г. Коноплев, Р.С. Якушев

ЛЕКЦИИ ПО ДИНАМИКЕ С ПОДВИЖНЫМИ НАГРУЗКАМИ

Казань: Отечество, 2003. 208с.

В предлагаемом вниманию читателя курсе лекций рассмотрены задачи о взаимодействии балочных и комбинированных арочных систем с движущимися силами и инерционными нагрузками. При изложении материала делается акцент на связь рассматриваемых математических моделей с практическими приложениями. Предлагаемая книга рассчитана на научных работников, инженеров-расчетчиков и студентов, как введение в динамику сооружений, взаимодействующих с подвижными нагрузками. Книга была написана на базе курса лекций, читаемых на механико-математических факультетах Казанского и Московского университетов.



ISBN 5-9222-0067-4