Ю.М. Молокович, А.С. Шкуро

Казанский государственный университет, механико-математический факультет

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ПО ПРОЦЕССАМ В ЗАДАЧАХ НЕРАВНОВЕСНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Предлагается использовать метод разделения времени по процессам для получения приближенных решений разнообразных задач неравновесной фильтрации, так как точные решения таких задач получены лишь в некоторых простейших случаях. Применение метода проиллюстрировано на двух примерах, имеющих точные решения. Полученные приближенные решения практически совпали с точными решениями.

1. Метод разделения времени по процессам широко используется в различных разделах прикладного естествознания. Суть метода состоит в следующем. Пусть надлежит исследовать поведение во времени некоторого процесса, состоящего из двух нестационарных подпроцессов. Один из них протекает во времени существенно быстрее нежели другой, что является предпосылкой для введения двух времен: короткого и длинного, причем короткое время относится к быстрому подпроцессу, а длинное – к медленному. Далее, оба подпроцесса изучаются автономно (независимо друг от друга), а затем в окончательном результате возвращаются к единому времени.

Аналогичная ситуация имеет место при снятии кривой восстановления давления на скважине, когда нестационарная фильтрация в ее окрестности осуществляется в неравновесных условиях, связанных с запаздыванием во времени: либо скорости фильтрации от изменения градиента давления, либо количества жидкости в элементарном объеме от изменения давления в нем. Как показывают промысловые исследования (Молокович и др., 1980), в обоих случаях процесс запаздывания (релаксации) полностью завершается за 1 – 2 часа, а снятие кривой восстановления давления продолжается в течение суток и более. Тогда, согласно методу разделения времени по процессам, можно ввести короткое время, отвечающее за релаксационный процесс, и длинное время, соответствующее нестационарному процессу в целом.

Нахождение точных аналитических решений задач неравновесной фильтрации сопряжено с большими математическими трудностями; таких решений на настоящее время получено единицы. Поэтому использование метода разделения времени по процессам может в некоторой степени компенсировать отсутствие точных решений разнообразных задач нестационарной фильтрации, протекающих в неравновесных условиях и имеющих прикладное значение. Ниже на двух примерах, имеющих точное решение (Молокович, Осипов, 1987), проиллюстрируем применение метода разделения времени по процессам и покажем весьма удовлетворительную точность таких решений (Молокович, Шкуро, 1999), что может служить обоснованием применения этого метода.

2. Рассмотрим сначала нестационарное течение однородной капельно-сжимаемой жидкости в полубесконечном ($0 < x < \infty$) однородном упругоемком пласте. Предполагается пласт первоначально невозмущенным:

$$p(x,0) = p_0; \tag{1}$$

в начальный момент времени на левом конце пласта начинает работать галерея с постоянным забойным давлением, на бесконечности он остается невозмущенным:

$$p(0,t) = p_{\Gamma 0}, \qquad p(\infty,t) = p_0; \tag{2}$$

фильтрация в пласте осуществляется по простейшему неравновесному закону и описывается системой уравнений:

$$w = -\frac{k\tau_p}{\mu\tau_w}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{k}{\mu}(1-\frac{\tau_p}{\tau_w})\int_0^t \frac{\partial p}{\partial x}\exp(-\frac{t-t'}{\tau_w})\frac{dt'}{\tau_w}, \tag{3}$$

$$\rho_0\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial(m\rho)}{\partial t} = 0, \tag{4}$$

$$m\rho - m_0\rho_0 = \rho_0\beta(p-p_0); \tag{5}$$

эта система легко сводится к эквивалентному ей уравнению пьезопроводности вида:

$$\kappa\frac{\tau_p}{\tau_w}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \kappa(1-\frac{\tau_p}{\tau_w})\int_0^t \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\exp(-\frac{t-t'}{\tau_w})\frac{dt'}{\tau_w} = \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{6}$$

Здесь $p(x,t)$ – давление, $w(x,t)$ – скорость фильтрации, k – коэффициент проницаемости, μ, ρ – вязкость и плотность жидкости, m – коэффициент пористости, $\beta = \beta_c + m_0\beta_Ж$ – коэффициент упругоемкости пласта, β_c, $\beta_Ж$ – коэффициенты сжимаемости соответственно пористой среды и жидкости, $\kappa = k/\mu\,\beta$ – коэффициент пьезопроводности пласта, τ_p, τ_w – положительные постоянные размерности времени. Тогда задача об определении давления математически сводится к нахождению в области $0 < x < \infty$ и для $t > 0$ решения уравнения (6), удовлетворяющего условиям: начальному (1) и граничным (2). Дополнительно определим также и дебит галереи, он, очевидно, равен

$$Q(t) = -Fw(x,t)\big|_{x=0} =$$

$$F\left[\frac{k\tau_p}{\mu\tau_w}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{k}{\mu}(1-\frac{\tau_p}{\tau_w})\int_0^t \frac{\partial p}{\partial x}\exp(-\frac{t-t'}{\tau_w})\frac{dt'}{\tau_w}\right]_{x=0}, \tag{7}$$

где F – площадь поперечного сечения пласта. Точное решение задачи (6), (1), (2) имеет вид (Молокович, Осипов, 1987):

$$p(x,t) = p_0 - (p_0 - p_{\Gamma 0})\{1 - \frac{1}{\pi}[\int_0^{1/\tau_p} \sin(x\sqrt{\frac{\xi(1-\tau_w\xi)}{\kappa(1-\tau_p\xi)}}) \times$$

$$\times\frac{\exp(-\xi t)}{\xi}d\xi + \int_{1/\tau_w}^{\infty} \sin(x\sqrt{\frac{\xi(1-\tau_w\xi)}{\kappa(1-\tau_p\xi)}})\frac{\exp(-\xi t)}{\xi}d\xi]\}; \tag{8}$$

здесь для определенности предполагается $\tau_p > \tau_w$.

При этом дебит галереи, путем подстановки (8) в (7), запишется так:

$$
\begin{aligned}
Q(t) = F\frac{k(p_0-p_{\Gamma 0})}{\mu\sqrt{\pi\kappa}}\Big[\frac{\tau_p}{\tau_w\sqrt{\pi}}\Big(\int_0^{1/\tau_p}\sqrt{\frac{1-\tau_w\xi}{1-\tau_p\xi}}\frac{\exp(-\xi t)}{\sqrt{\xi}}d\xi + \\
+\int_{1/\tau_w}^{\infty}\sqrt{\frac{1-\tau_w\xi}{1-\tau_p\xi}}\frac{\exp(-\xi t)}{\sqrt{\xi}}d\xi\Big) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big(\frac{\tau_p}{\tau_w}-1\Big)\times \\
\times\int_0^t\Big(\int_0^{1/\tau_p}\sqrt{\frac{1-\tau_w\xi}{1-\tau_p\xi}}\frac{\exp(-\xi t')}{\sqrt{\xi}}d\xi + \\
+\int_{1/\tau_w}^{\infty}\sqrt{\frac{1-\tau_w\xi}{1-\tau_p\xi}}\frac{\exp(-\xi t')}{\sqrt{\xi}}d\xi\Big)\exp\Big(-\frac{t-t'}{\tau_w}\Big)\frac{dt'}{\tau_w}\Big].
\end{aligned}
\quad (9)
$$

3. Для получения приближенного решения задачи (6), (1), (2) по методу разделения времени по процессам в релаксационном законе фильтрации (3) введем короткое время θ_1, характеризующее запаздывание скорости фильтрации по отношению к изменению градиента давления во времени t, т.е. приближенно представим соотношение (3) следующим образом:

$$
\begin{aligned}
w(x,t,\theta_1) = -\frac{k\tau_p}{\mu\tau_w}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} - \frac{k}{\mu}\Big(1-\frac{\tau_p}{\tau_w}\Big)\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}\times \\
\times\int_0^{\theta_1}\exp\Big(-\frac{\theta_1-\theta'}{\tau_w}\Big)\frac{d\theta'}{\tau_w} = -\frac{k\tau_p}{\mu\tau_w}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} - \frac{k}{\mu}\Big(1-\frac{\tau_p}{\tau_w}\Big)\times \\
\times\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}\exp\Big(-\frac{\theta_1}{\tau_w}\Big)\Big(\exp\Big(\frac{\theta_1}{\tau_w}\Big)-1\Big) = -\frac{k(\theta_1)}{\mu}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x},
\end{aligned}
\quad (10)
$$

где

$$k(\theta_1) = k\Big[1-\Big(1-\frac{\tau_p}{\tau_w}\Big)\exp\Big(-\frac{\theta_1}{\tau_w}\Big)\Big]. \quad (11)$$

Тогда, исключая из системы (10), (4), (5) все искомые величины, кроме давления, получим уравнение пьезопроводности

$$\kappa(\theta_1)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (12)$$

в котором коэффициент пьезопроводности является функцией короткого времени (параметра) θ_1:

$$\kappa(\theta_1) = \kappa\Big[1-\Big(1-\frac{\tau_p}{\tau_w}\Big)\exp(-\theta_1/\tau_w)\Big]. \quad (13)$$

Уравнение пьезопроводности для классического упругого режима фильтрации имеет вид

$$\kappa\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Решение этого уравнения при выполнении краевых условий (1) и (2) такое

$$p(x,t) = p_0-(p_0-p_{\Gamma 0})\,\mathrm{erfc}\Big(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\Big). \quad (14)$$

Также известен и дебит галереи, он равен

$$Q(t) = F\frac{k(p_0-p_{\Gamma 0})}{\mu\sqrt{\pi\kappa t}}. \quad (15)$$

Очевидно, уравнение (12) соответствует модели классического упругого режима фильтрации, только в нем пьезопроводность зависит от параметра θ_1. Следовательно, для определения приближенного решения задачи (6), (1), (2), а также нахождения соответствующего дебита галереи (7) нужно в ф-лах (14) и (15) заменить k и κ на $k(\theta_1)$ и $\kappa(\theta_1)$, а затем вернуться к единому времени t, положив, $\theta_1 = t$; в результате чего получим:

$$p(x,t) = p_0-(p_0-p_{\Gamma 0})\,\mathrm{erfc}\Big(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t[1\text{-}(1\text{-}\tau_p/\tau_w)\exp(-t/\tau_w)]}}\Big), \quad (16)$$

$$Q(t) = F\frac{k(p_0-p_{\Gamma 0})}{\mu\sqrt{\pi\kappa t}}\sqrt{1-(1-\tau_p/\tau_w)\exp(-t/\tau_w)}. \quad (17)$$

4. Проведем сравнение точных (8), (9), приближенных (16), (17) и классических решений (14), (15). В расчетах принималось $\tau_p = 600$ с и $\tau_w = 400$ с, что соответствует средним значениям величин τ_p и τ_w, полученным в промысловых условиях (Молокович и др.,1980), коэффициент пьезопроводности брался равным $\kappa = 10000$ см^2/с. На рис. 1 изображены графики кривых (14) и (16) для моментов времени $t = 25$ с (первая пара слева), $t = 100$ с (вторая пара), $t = 400$ с (третья), $t = 1000$ с (четвертая). В каждой паре верхняя кривая соответствует ф-ле (14), нижняя – ф-ле (16). На оси абсцисс откладывались значения x, на оси ординат – значения $\bar{p} = (p(x,t)-p_{\Gamma 0})/(p_0-p_{\Gamma 0})$. Подсчитывались также значения $\bar{p}$ по точной ф-ле (8) для тех же значений t и $x = 100$ см, 200 см,..., 5000 см. Полученные точки практически легли на нижние кривые, соответствующие приближенной ф-ле (16). На рис. 2 приведены графики кривых (15) (нижняя) и (17) (верхняя). На оси абсцисс откладывались значения t, на оси ординат – значения $\bar{Q} = \mu\sqrt{\pi\kappa}\,Q(t)/Fk\,(p_0-p_{\Gamma 0})$. Подсчитывались также значения $\bar{Q}$ по точной ф-ле (9) для значений $t = 25$ с, 50 с,..., 1000 с. Полученные точки практически легли на верхнюю кривую, соответствующую приближенной ф-ле (17). Таким образом, сравнение решений, полученных с помощью метода разделения времени по процессам, с соответствующими точными решениями показывает достаточно высокую точность приближенных решений. В то же время из приведенных графиков видно, что точные и приближенные решения, соответствующие модели фильтрации с релаксационным законом (3), существенно отличаются от решений, соответствующих модели классического упругого режима фильтрации.

5. Рассмотрим задачу, поставленную в п. 2, где неравновесный закон фильтрации (3) заменим законом Дарси

$$w = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (18)$$

а уравнение состояния (5) для упругого пласта – уравнением состояния для релаксационно-сжимаемого пласта

$$m\rho - m_0\rho_0 = \rho_0\beta\Big[\frac{\theta_p}{\theta_m}(p-p_0) + \Big(1-\frac{\theta_p}{\theta_m}\Big)\int_0^t(p-p_0)\exp\Big(-\frac{t-t'}{\theta_m}\Big)\frac{dt'}{\theta_m}\Big],$$

где θ_p и θ_m – положительные постоянные размерности времени. Подставив (18) и (19) в уравнение неразрывности (4), получим уравнение пьезопроводности вида

$$\kappa\frac{\theta_m}{\theta_p}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \kappa\Big(1-\frac{\theta_m}{\theta_p}\Big)\int_0^t\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\exp\Big(-\frac{t-t'}{\theta_p}\Big)\frac{dt'}{\theta_p} = \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (20)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (6), только вместо постоянных τ_p и τ_w стоят соответственно θ_p и θ_m, поэтому задача (20), (1), (2) будет иметь решение

$$
\begin{aligned}
p(x,t) = p_0-(p_0-p_{\Gamma 0})\Big\{1-\frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{1/\theta_m}\sin\Big(x\sqrt{\frac{\xi(1-\theta_p\xi)}{\kappa(1-\theta_m\xi)}}\Big)\times \\
\times\frac{\exp(-\xi t)}{\xi}d\xi + \int_{1/\theta_p}^{\infty}\sin\Big(x\sqrt{\frac{\xi(1-\theta_p\xi)}{\kappa(1-\theta_m\xi)}}\Big)\frac{\exp(-\xi t)}{\xi}d\xi\Big]\Big\},
\end{aligned}
\quad (21)
$$

где предполагается $\theta_m > \theta_p$. При этом дебит галереи:

$$Q(t) = -Fw(x,t)\Big|_{x=0} = F\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{x=0} = F\frac{k(p_0 - p_{\Gamma 0})}{\mu\sqrt{\kappa\pi}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\times$$

$$\times(\int_0^{1/\theta_m}\sqrt{\frac{1-\theta_p\xi}{1-\theta_m\xi}}\frac{\exp(-\xi t)}{\sqrt{\xi}}d\xi + \int_{1/\theta_p}^{\infty}\sqrt{\frac{1-\theta_p\xi}{1-\theta_m\xi}}\frac{\exp(-\xi t)}{\sqrt{\xi}}d\xi). \quad (22)$$

6. Для получения приближенного решения задачи (20), (1), (2) по методу разделения времени по процессам в уравнении состояния (19) введем короткое время θ_2, характеризующее запаздывание количества жидкости в элементарном объеме от изменения давления в нем во времени t, то есть приближенно представим соотношение (19) следующим образом

$$m\rho - m_0\rho_0 = \rho_0\beta[\frac{\theta_p}{\theta_m}(p-p_0) + (1-\frac{\theta_p}{\theta_m})(p-p_0)\times$$

$$\times\int_0^{\theta_2}\exp(-\frac{\theta_2 - t'}{\theta_m})\frac{dt'}{\theta_m}] = \rho_0\beta[\frac{\theta_p}{\theta_m}(p-p_0) + (1-\frac{\theta_p}{\theta_m})\times \quad (23)$$

$$\times(p-p_0)\exp(-\theta_2/\theta_m)(\exp(\theta_2/\theta_m)-1)] = \rho_0\beta(\theta_2)(p-p_0),$$

где

$$\beta(\theta_2) = \beta[1-(1-\frac{\theta_p}{\theta_m})\exp(-\theta_2/\theta_m)]. \quad (24)$$

Тогда, исключая из системы (18), (4), (23) все искомые величины, кроме давления, получим уравнение пьезопроводности

$$\kappa(\theta_2)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (25)$$

в котором коэффициент пьезопроводности является функцией короткого времени (параметра) θ_2

$$\kappa(\theta_2) = \frac{\kappa}{1-(1-\theta_p/\theta_m)\exp(-\theta_2/\theta_m)}. \quad (26)$$

Решение задачи (25), (1), (2) записывается формулой

$$p(x,t) = p_0 - (p_0 - p_{\Gamma 0})\operatorname{erfc}(\frac{x}{2\sqrt{\kappa(\theta_2)t}}), \quad (27)$$

а дебит галереи равен

$$Q(t) = F\frac{k(p_0 - p_{\Gamma 0})}{\mu\sqrt{\pi\kappa(\theta_2)t}}. \quad (28)$$

Для нахождения приближенного решения задачи (20), (1), (2), а также нахождения соответствующего дебита галереи, нужно в формулах (27) и (28) вернуться к единому времени t, положив $\theta_2 = t$ в результате чего получим

$$p(x,t) = p_0 - (p_0 - p_{\Gamma 0})\times$$

$$\times\operatorname{erfc}(\frac{x\sqrt{1-(1-\theta_p/\theta_m)\exp(-t/\theta_m)}}{2\sqrt{\kappa t}}). \quad (29)$$

$$Q(t) = F\frac{k(p_0 - p_{\Gamma 0})\sqrt{1-(1-\theta_p/\theta_m)\exp(-t/\theta_m)}}{\mu\sqrt{\pi\kappa t}}. \quad (30)$$

7. Проведем сравнение точных (21), (22), приближенных (29), (30) и классических решений (14), (15) аналогично тому, как это делалось в п. 4. В расчетах принималось θ_m =600 с, θ_p= 400 с, κ =10000 см^2/с. В результате графики кривых (14) и (29) совпали с кривыми (14) и (16), изображенными на рис.1. Точные значения $\bar{p}$ также совпали с соответствующими приближенными значениями. Точные решения задач п. 2 и п. 5 совпали потому, что при $\tau_p = \theta_m$ и $\tau_w = \theta_p$ решаются одинаковые дифференциальные уравнения при одних и тех же краевых условиях. На рис. 3 приведены графики кривых (15) (верхняя) и (30) (нижняя). На оси абсцисс откладывались значения t, на оси ординат – значения $\bar{Q} = \mu\sqrt{\pi\kappa}\,Q(t)\,/\,Fk\,(p_0 - p_{\Gamma 0})$. Подсчитывались также значения $\bar{Q}$ по точной формуле (22) для значений t = 25 с, 50 с,..., 1000 с. Полученные точки практически легли на нижнюю кривую, соответствующую приближенной формуле (30). Таким образом, сравнение приближенных решений с соответствующими точными решениями и в этой задаче показывает достаточно высокую точность метода разделения времени по процессам.

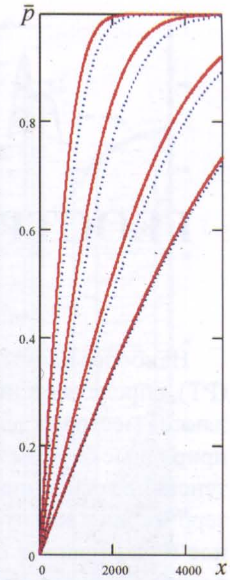

Рис. 1. Кривые изменения давления $\bar{p}$ в зависимости от расстояния x для t = 25с, 100с, 400с, 1000с по (14) и (16).

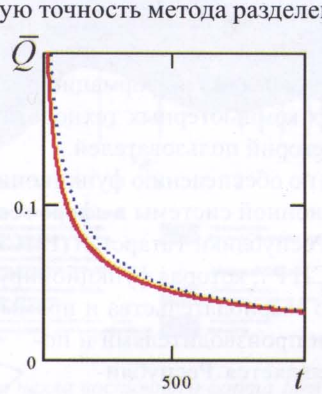

Рис. 2. Графики кривых изменения дебита $\bar{Q}$ в зависимости от времени t по формулам (15) и (17).

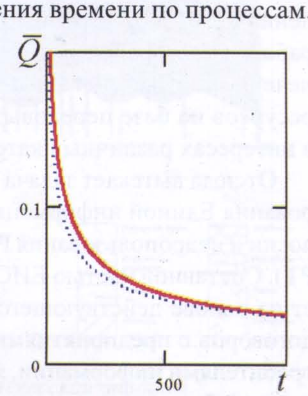

Рис. 3. Графики кривых изменения дебита $\bar{Q}$ в зависимости от времени t по формулам (15) и (30).

Литература

Молокович Ю.М., Непримеров Н.Н., Пикуза В.И., Штанин А.В. *Релаксационная фильтрация.* Казань. Изд-во Казанского ун-та, 1980. 136.

Молокович Ю.М., Осипов П.П. *Основы теории релаксационной фильтрации.* Казань. Изд-во Казанского ун-та, 1987. 116.

Молокович Ю.М., Шкуро А.С. Разделение времени в задачах неравновесной фильтрации. *Труды математ. центра им. Н.И. Лобачевского. Краевые задачи и их приложения.* Т.3. Казань. 1999. 339-342.

Юрий Матвеевич Молокович

д. ф.-м.н., почётный член РАЕН, профессор кафедры аэрогидромеханики КГУ. Область научных интересов: теория неравновесной фильтрации в пористых средах сложного строения и приложения её к разработке нефтяных месторождений.

Александр Сергеевич Шкуро

к. ф.-м. н., доцент кафедры общей математики КГУ. Область научных интересов: фильтрация жидкостей в пористых средах, определение фильтрационных параметров.